1.3　加法定理

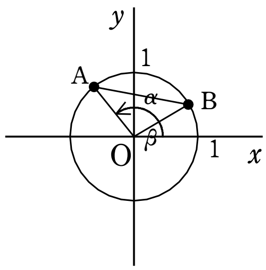
(1) 正弦・余弦の加法定理

2つの角の和または差の三角関数の値は，それぞれの角の三角関数の値で表すことができます。次の問題は，実際に東大で出題されたものです。

> 例1
> (1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ.
> (2)　(1) で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して
> $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
> $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
> を証明せよ.

(解説)

(1) 単位円周上の点 $P(x,\ y)$ に対して，OP と x 軸とのなす角を θ とするとき， $\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$ と定義する

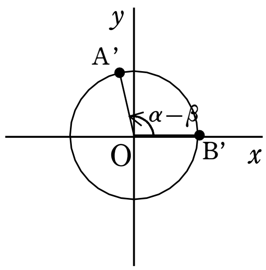


(2) $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\beta, \sin\beta)$ とすると，

$$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$$

また，図の三角形 OAB を O のまわりに $-\beta$ 回転させて，

A, B が移動した後の点をA’, B’とすると，



$$A'(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta)),\ B'(1, 0)$$

より，

$$A'^2B'^2=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha-\beta)^2$$
$$=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

$AB^2=A'^2B'^2$ より

$$2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=2-2\cos(\alpha-\beta)$$
$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$\beta=-\beta$ とすると，

$$\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$$

$$=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$\beta=-\beta$ とすると，

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

も得られます。

まとめると次のようになります。

正弦，余弦の加法定理

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
   $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

例2

$\cos 15^\circ$ の値を求めよ。

解説

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$$

$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

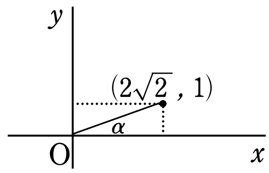
例3

α, β をそれぞれ第 1 , 第 3 象限の角とする．$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)=$ ア $\boxed{}$, $\cos(\alpha-\beta)=$ イ $\boxed{}$ である．

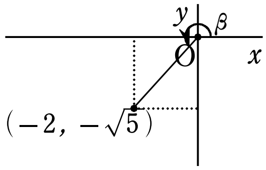
解説

$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ ，α は第 1 象限の角より

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



$\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$ ，β は第3象限の角より



$\sin\beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = \dfrac{-2-2\sqrt{10}}{9}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = \dfrac{-4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$

別解

$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ ，α は第 1 象限の角であるから $\cos\alpha > 0$ より

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$ ，β は第 3 象限の角であるから $\sin\beta < 0$ より

$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

として求めてもよい。

例4

(1) $\sin x + \sin y = 1$，$\cos x + \cos y = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(x-y)$ の値を求めよ。

(2) $0° \leqq \alpha \leqq 90°$，$0° \leqq \beta \leqq 90°$ で $\sin\alpha + \cos\beta = \dfrac{5}{4}$，$\cos\alpha + \sin\beta = \dfrac{5}{4}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

(3) $0° < \alpha < 90°$，$90° < \beta < 180°$ で，$\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{5}{6}$，$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{6}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$の値を求めよ.

解説

(1) $\sin x + \sin y = 1$

両辺 2 乗して

$\sin^2 x + 2\sin x\sin y + \sin^2 y = 1$ …①

$\cos x+\cos y=\dfrac{1}{3}$

両辺 2 乗して

$\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=\dfrac{1}{9}$ …②

①+②より

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)+(\sin^2 y+\cos^2 y)=\frac{10}{9}$$

$$2+2\cos(x-y)=\frac{10}{9}\qquad \therefore\ \cos(x-y)=-\frac{4}{9}$$

(2) $(\sin\alpha+\cos\beta)^2+(\cos\alpha+\sin\beta)^2$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=2+2\sin(\alpha+\beta)$ より

$$2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2=2+2\sin(\alpha+\beta)\qquad \therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{9}{16}$$

$0<\alpha+\beta<180^\circ$ より，$\cos(\alpha+\beta)=\pm\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

よって

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\pm\frac{9}{5\sqrt{7}}=\pm\frac{9\sqrt{7}}{35}$$

(1) $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{5}{6}$，$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$ より

$\sin\alpha$，$\sin\beta$ は $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$ すなわち $6x^2-5x+1=0$ の解である

$$6x^2-5x+1=0$$

$$(2x-1)(3x-1)=0\qquad \therefore\ x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$$

よって，$(\sin\alpha,\ \sin\beta)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$0^\circ<\alpha<90^\circ$，$90^\circ<\beta<180^\circ$ より

$(\sin\alpha,\sin\beta)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)$ のとき，$(\cos\alpha,\cos\beta)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

よって

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

$(\sin\alpha,\ \sin\beta)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，$(\cos\alpha, \cos\beta)=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

(2) 点の回転

正弦，余弦の加法定理を利用すると，座標平面上の点を，原点 O を中心として一定の角 θ だけ回転させた点の座標を求めることができます。

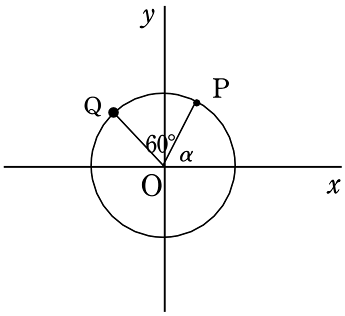
例5

点P(2, 4) を，原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点の座標を求めよ。

解説

x 軸正の向きと OP のなす角を α とすると

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$



求める点を Q とすると $OP=OQ=2\sqrt{5}$ より

$$Q\left(2\sqrt{5}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right), 2\sqrt{5}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

ここで，

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}(1-2\sqrt{3})}{10}$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}(2+\sqrt{3})}{10}$$

よって，

$$Q(1-2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$$

(3) **正接の加法定理**

正弦と余弦の加法定理から，正接の加法定理を導くことができます。

正接の加法定理
3. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$\alpha, \beta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}+n\pi$ (n は整数) で考えて，分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると，

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$\beta=-\beta$ とすれば，第 2 式が得られます。

注 $\tan\theta$ は， $\alpha+\beta, \alpha-\beta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}+n\pi$ では定義されないので，

$\alpha+\beta, \alpha-\beta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}+n\pi$ とします。

例6
α，β が鋭角で，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき $\tan(\alpha+\beta)$ の値は
ア$\boxed{}$ であり，$\alpha+\beta=$ イ$\boxed{}$ である。

(解説)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}}={}^{ア}1$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ から $0<\alpha+\beta<\pi$ より

$$\alpha+\beta={}^{イ}\frac{\pi}{4}$$

例7

$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$，$0<\alpha$，β，$\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

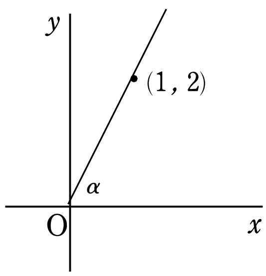
(1)　$\sin\alpha$ を求めよ。

(2)　$\tan(\alpha+\beta+\gamma)$，$\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ。

(3)　$\beta-\alpha>\gamma-\beta$ となることを示せ。

(4)　$\beta>\dfrac{5\pi}{12}$ となることを示せ。

(解説)



(1) $\tan\alpha=2, 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(2) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+5}{1-2\cdot5}=-\frac{7}{9}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot8}=1$$

$\alpha, \beta, \gamma>\dfrac{\pi}{4}$ であるから， $\dfrac{3}{4}\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$ より

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi$$

(3) $$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{3}{11}$$

$\tan(\gamma-\beta)=\dfrac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}=\dfrac{3}{41}$ より

$\tan(\beta-\alpha)>\tan(\gamma-\beta)$

$0<\beta-\alpha, \gamma-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で $\tan\theta$ は単調増加であるから

$\beta-\alpha>\gamma-\beta$

(4) (3)から，$\beta-\alpha>\gamma-\beta$ より，$2\beta-(\alpha+\gamma)>0$

(2)から，$\alpha+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi-\beta$ より

$$2\beta-\left(\frac{5}{4}\pi-\beta\right)>0 \qquad \therefore \beta>\frac{5}{12}\pi$$

例8

(1) 2 次方程式 $x^2-4\sqrt{3}x-3=0$ の 2 解が $\tan\alpha$，$\tan\beta$ (ただし $0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$) であるとき，$\tan(\alpha+\beta)=$ ア$\boxed{}$ となり，したがって $\alpha+\beta=$ イ$\boxed{}$ である。

(2) 次の 2 つの等式 $\tan(x+y)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$，$\tan x+\tan y=1+\sqrt{3}$ を満たす x，yを求めよ。ただし，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<y<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

解説

(1) 解と係数の関係より

$\tan\alpha+\tan\beta=4\sqrt{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=-3$

よって

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4\sqrt{3}}{1-(-3)}=\sqrt{3}$$

$\tan\alpha\tan\beta=-3<0$ であるから，

$\tan\alpha, \tan\beta$のうち，一方は正で他方は負であるから

α, β のうち一方は $\dfrac{\pi}{2}$ 未満，他方は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいので

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3}{2}\pi$ より

$$\alpha+\beta=\frac{4}{3}\pi$$

(2) $\tan(x+y)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ より

$$\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$\tan x+\tan y=1+\sqrt{3}$ より

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\tan x\tan y}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$1-\tan x\tan y=1-\sqrt{3} \qquad \therefore \tan x\tan y=\sqrt{3}$$

$\tan x+\tan y=1+\sqrt{3}$，$\tan x\tan y=\sqrt{3}$ より，$\tan x$，$\tan y$ は

2 次方程式 $t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0$ の解である

$$t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0$$

$$(t-1)(t-\sqrt{3})=0 \quad \therefore t=1,\ \sqrt{3}$$

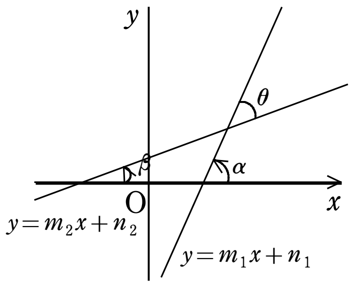
よって

$$(\tan x, \tan y)=(1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, 1)$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<y<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$(x, y)=\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$$

(4) 2 直線のなす角



一般に，交わる 2 直線

$y=m_1x+n_1,\ y=m_2x+n_2$

が垂直でないとき，そのなす角を θ とすると，

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

が成り立ちます。これは正接の加法定理より導かれます。

$y=m_1x+n_1,\ y=m_2x+n_2$ と x 軸の正の向きとのなす角を α, β とする。ただし，$0<\beta<\alpha<\pi$ となるように，$y=m_1x+n_1,\ y=m_2x+n_2$ を定める。このとき，$\tan\alpha=m_1, \tan\beta=m_2$ であり，

$\theta=\alpha-\beta$ となるようにとると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

ここで，2 直線のなす角は 2 つ (鋭角と鈍角) あるが，θ がその鋭角の方であるか鈍角の方であるかは不明である。
鋭角の方を求めたい場合，鋭角の方を φ とすると
一方は θ であるから，他方は $\pi-\theta$ より
θ が鋭角のとき，

$$\tan\varphi=\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}>0$$

θ が鈍角のとき， $\tan\theta<0$ であるから， $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}<0$

$\pi-\theta$ が鋭角より，

$$\tan\varphi=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta=-\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

すなわち，

$$\tan\varphi=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

とすればよい。

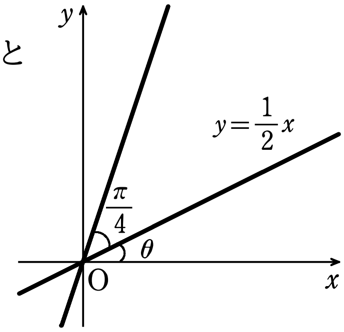
例9
(1) 2 直線 $y=2x-4$，$y=\dfrac{1}{3}x+1$ を考える。これらの交点の座標は $(x,\ y)=\left({}^{ア}\boxed{},\ {}^{イ}\boxed{}\right)$ である。また，なす鋭角 θ は，$\theta={}^{ウ}\boxed{}\pi$ である。
(2) 直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ を原点のまわりに正の向きに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した直線の方程式は $y=\boxed{}x$ である。
(3) 直線 $x-3y+6=0$ とのなす角が 45° で，点 (9，3) を通る直線の方程式を 2 つ求めよ。

(解説)
(1) 2 直線の交点の座標は，$(x,\ y)=({}^{ア}3,\ {}^{イ}2)$

2 直線のなす鋭角を θ とすると， $\tan\theta=\left|\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\cdot\dfrac{1}{3}}\right|=1$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta=$ ウ $\dfrac{1}{4}\pi$

(2) 直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ と x 軸のなす鋭角を θ とすると



$$\tan\theta=\frac{1}{2}$$

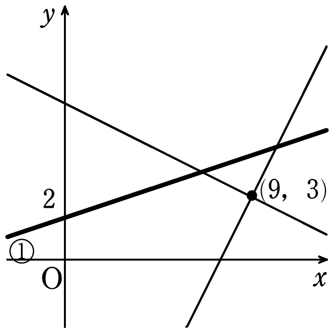
よって，求める直線の傾きは

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\cdot 1}=3$$

したがって，求める直線の方程式は，$y=3x$

(3) $x-3y+6=0$ … ①



直線①の傾きは $\dfrac{1}{3}$

求める直線は x 軸に垂直ではないから，
傾きを m とすると，
求める直線は①に垂直でないから，$m\neq -3$
①とのなす角が 45° より

$$\tan 45^\circ=\left|\frac{m-\frac{1}{3}}{1+m\cdot\frac{1}{3}}\right|$$

$$=\left|\frac{3m-1}{3+m}\right|=1$$

$\dfrac{3m-1}{3+m}=1$ のとき，$3m-1=3+m$ $\quad\therefore\ m=2$

$\dfrac{3m-1}{3+m}=-1$ のとき，$3m-1=-(3+m)$ $\quad\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$

よって，求める直線の方程式は

$$y-3=2(x-9),\quad y-3=-\frac{1}{2}(x-9)$$

$$\therefore\ 2x-y-15=0,\quad x+2y-15=0$$

例10

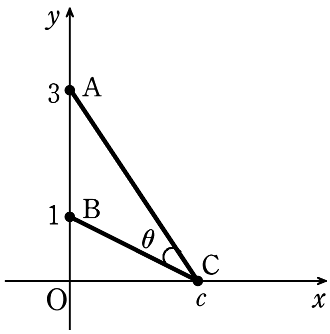
座標平面において，y 軸上に点 A(0，3) と点 B(0，1) をとり，x 軸上に点 C(c，0) ($c>0$) をとる．角 ∠ACB を θ ($0°<\theta<180°$) とする．

(1)　$c=2$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　c が $c>0$ の範囲で変化するとき，θ は $c=$ ア$\boxed{}$ で最大値 イ$\boxed{}$ をとる．

(解説)

原点をO，$\angle ACO=\alpha$，$\angle BCO=\beta$ とおく



(1) $\tan\alpha=\dfrac{3}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$ より

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}=\frac{4}{7}$$

(2) $\tan\alpha=\dfrac{3}{c}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{c}$ より

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{3}{c}-\dfrac{1}{c}}{1+\dfrac{3}{c}\cdot\dfrac{1}{c}}=\frac{2}{c+\dfrac{3}{c}}$$

$c>0$ であるから，相加相乗平均より

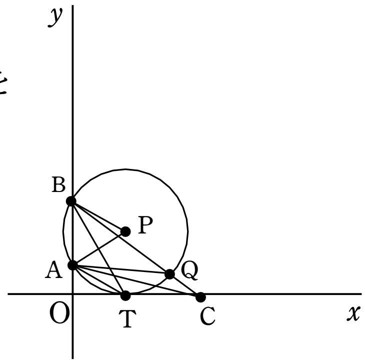
$$c+\frac{3}{c}\geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{3}{c}}=2\sqrt{3}$$

等号は $c=\dfrac{3}{c}$ すなわち $c=\sqrt{3}$ のとき成り立つ

よって，$\tan\theta$ は $c=\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ をとる

このとき，θ は最大値 30° をとる

別解 幾何学で解く



図のように，A, B を通り x 軸に接する円をかき，この円の中心を P， x 軸との接点を T とおく

C が T 以外の点であるとき，この円と BC との交点を Q とすると

∠ATB＝∠AQB，

∠ACB＋∠QAC＝∠AQB であるから

∠ATB ＞ ∠ACB より，

C が T の位置にあるとき，θ は最大である

△PAB はPA＝PB の二等辺三角形であるから，P の y 座標は 2

よって，円の半径は PT=2 より，PA＝PB＝ 2

したがって，△PAB は正三角形より，∠APB=60°

円周角の定理より，∠ATB=30°

よって，θ の最大値は 30°

確認問題1

三角形 ABC において，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるとき，$\sin C=\boxed{}$ である。

(解説)

$A+B+C=\pi$ であるから $C=\pi-(A+B)$ より

$$\begin{aligned}\sin C&=\sin\{\pi-(A+B)\}\\&=\sin(A+B)\\&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\end{aligned}$$

ここで，

$\cos A=\dfrac{3}{5}$， $0<A<\pi$ より

$$\sin A=\frac{4}{5}$$

$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $0<B<\pi$ より

$$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって

$$\sin C=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$ 答

確認問題2

α は第 2 象限，β は第 3 象限の角で， $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}, \cos\beta=-\dfrac{12}{13}$ のとき，

$\alpha+\beta$ は第何象限の角か.

(解説)

$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，α は第 2 象限の角より

$$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$$

$\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$，$\beta$ は第 3 象限の角より

$$\sin\beta=-\frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{12}{65}<0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{56}{65}>0\end{aligned}$$

より， $\alpha+\beta$ は第 4 象限の角である　答

確認問題3

△ABCにおいて，∠A，∠B，∠Cの大きさをそれぞれ A，B，C とする。$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ がすべて整数で，$A<B<C$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\tan(B+C)$ を $\tan A$ を用いて表せ。

(2) $C<90^\circ$ を示せ。

(3) $\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ の組をすべて求めよ。

解説

(1) $A+B+C=180^\circ$ であるから， $B+C=180^\circ-A$ より

$\tan(B+C)=\tan(180^\circ-A)=-\tan A$ 答

(2) $A<B<C$ より

$180^\circ=A+B+C>A+A+A=3A \quad \therefore 0^\circ<A<60^\circ$

このとき，$0<\tan A<\sqrt{3}$ ，$\tan A$ は整数であるから

$\tan A=1 \quad \therefore A=45^\circ$

よって，$B+C=135^\circ$， $B>A=45^\circ$ より

$C=135^\circ-B<135^\circ-45^\circ=90^\circ \quad \therefore C<90^\circ$ 答

(3) (1), (2) より

$\tan(B+C)=-1$

$$\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-1$$

$\tan B+\tan C=\tan B\tan C-1$

$\tan B\tan C-\tan B-\tan C-1=0$

$(\tan B-1)(\tan C-1)=2$

$45^\circ=A<B<C<90^\circ$ であるから

$1=\tan A<\tan B<\tan C$

$\therefore 0<\tan B-1<\tan C-1$

より

$\tan B-1=1$，$\tan C-1=2$

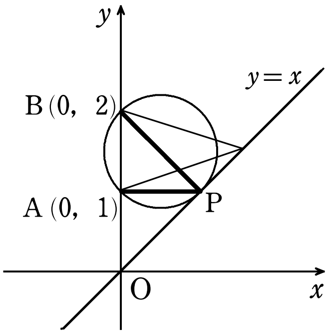
$\therefore \tan B=2$，$\tan C=3$

$\therefore (\tan A,\ \tan B,\ \tan C)=(1,\ 2,\ 3)$ 答

確認問題4

xを正の実数とする。座標平面上の3点A(0, 1), B(0, 2), P(x, x)をとり，△APBを考える。xの値が変化するとき，∠APBの最大値を求めよ。

解説



点Pは直線 $y=x$ 上にある

点A，Bを通り直線 $y=x$ に接する円を考え

点Pがこの円と直線 $y=x$ の接点となるとき

∠APBは最大となる

このとき，方べきの定理により

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\mathrm{OP}^2$$

$$1\cdot2=\mathrm{OP}^2$$

$\mathrm{OP}>0$ より， $\mathrm{OP}=\sqrt{2}$

よって，点Pの座標は(1, 1)となり

このとき， $\angle\mathrm{APB}=45°$ となる