1.2　三角関数(2)・三角関数のグラフ

(1) 三角関数の相互関係

中3 で学んだ三角比の場合と同様に，次の公式が成り立ちます。

三角関数の相互関係

1. $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3. $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

例1

(1) $\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ を最も簡単にせよ.

(2) $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$ であるとき，$\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$ の値を求めよ。

(3) $\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}\left(\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)$ の値を求めよ.

解説

(1)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\theta}-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}&=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\\&=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\&=\frac{\cos\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\&=\frac{-(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=-\frac{1}{\sin\theta}\end{aligned}$$

(2) $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$ から $\cos\theta\fallingdotseq 0$ より

分母・分子を $\cos^2\theta$ で割ると，

$$\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}+2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{(1+\tan^2\theta)+2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{(1+\tan\theta)^2}{1-\tan^2\theta}=\frac{25}{9}\times\frac{9}{5}=5$$

(3) $\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}\left(\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)=\cos^2\theta\cdot\dfrac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$$=\cos^2\theta\cdot\frac{2}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\cos^2\theta\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}=2$$

例2

2 次方程式 $4x^2+kx+1=0$ の 2 つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であるとき，定数 k の値は ア$\boxed{}$ と イ$\boxed{}$ $\left(ア\boxed{}<イ\boxed{}\right)$ であり，このうち $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ となるときの k の値は ウ$\boxed{}$ である。

(解説)

解と係数の関係より

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{k}{4},\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より

$$\left(-\frac{k}{4}\right)^2=1+2\cdot\frac{1}{4}$$

$k^2=24$　　$\therefore\ k=\pm2\sqrt{6}$　　（ア $-2\sqrt{6}$，イ $2\sqrt{6}$）

$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ となるとき，

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{k}{4}>0\quad\therefore\ k<0$$

よって，$k=$ ウ $-2\sqrt{6}$

(2) 三角関数の性質

n が整数のとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は角 θ の動径と一致するから，次の公式が成り立ちます。

$\theta+2n\pi$ の三角関数

$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$

$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$

$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

例3

(1) $\sin 510^\circ \cos 405^\circ$ を計算せよ。

(2) $\dfrac{\cos\dfrac{13}{3}\pi}{\sin\dfrac{13}{3}\pi}$ の値を求めよ。

解説

(1) $\sin 510^\circ = \sin(150^\circ + 360^\circ) = \sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\cos 405^\circ = \cos(45^\circ + 360^\circ) = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって， $\sin 510^\circ \cos 405^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $\dfrac{\cos\dfrac{13}{3}\pi}{\sin\dfrac{13}{3}\pi} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{13}{3}\pi} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三角比で学んだ補角 $(180^\circ-\theta)$ の公式，余角 $(90^\circ-\theta)$ の公式は，補角であれば $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ ，余角であれば $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ と制限がありますが，θ に制限がなくても成り立ちます。

$\pi-\theta$ の三角関数

$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$

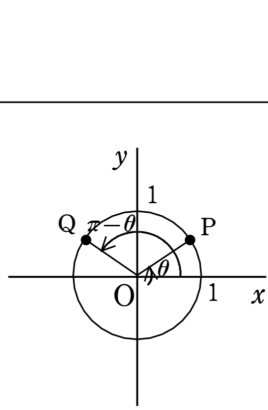
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$

右の図のように，角 θ ， $\pi-\theta$ の動径と単位円の交点を，それぞれ P, Q とすると，

　$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$

　$\mathrm{Q}(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta))$



2 点 P, Q は y 軸に関して対称であるから，Pの座標を $\mathrm{P}(a, b)$ とすると，Q の座標は $(-a, b)$ となる。

$a = \cos\theta,\ b = \sin\theta$ より

　$\cos(\pi-\theta) = -a = -\cos\theta,\ \sin(\pi-\theta) = b = \sin\theta$

$\tan\theta$ は $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より求めればよい。

$\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

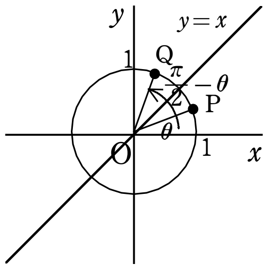
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$$

右の図のように，角 θ， $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の動径と

単位円の交点を，それぞれ P, Q とすると，

　$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$

　$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right), \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$



2 点 P, Q は $y=x$ に関して対称であるから，
P の座標を $\mathrm{P}(a, b)$ とすると，Q の座標は
(b, a) となる。
よって，これらの公式が成り立ちます。

$-\theta$ の三角関数

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

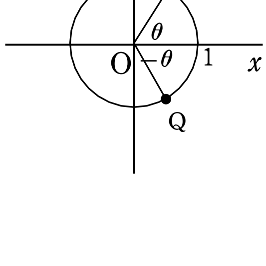
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

右の図のように，角 θ， $-\theta$ の動径と
単位円の交点を，それぞれ P, Q とすると，

　$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$

　$\mathrm{Q}(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$



2 点 P, Q は x 軸に関して対称であるから，
P の座標を $\mathrm{P}(a, b)$ とすると，Q の座標は
$(a, -b)$ となる。
よって，これらの公式が成り立ちます。

他にも $\theta+\pi, \theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数の公式等もありますが，きりがないので，$\theta+2n\pi, \pi-\theta, \dfrac{\pi}{2}-\theta, -\theta$ の4つだけ覚えておけばよい。覚えるというより，導き方を理解して下さい。導き方が理解できれば，$\theta+\pi, \theta+\dfrac{\pi}{2}$ も導くことができるし，それ以外のものも導くことができます。これらの公式は，最悪次節で学習する加法定理で導くことができます。参考までに，以下は $\theta+\pi, \theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数の公式です。

$\theta+\pi$ の三角関数

$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$

$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$

$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

(3) 三角関数のグラフ

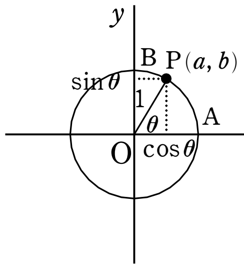
右の図のように，角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(a, b)$ とすると，

$\sin\theta = b, \cos\theta = a$

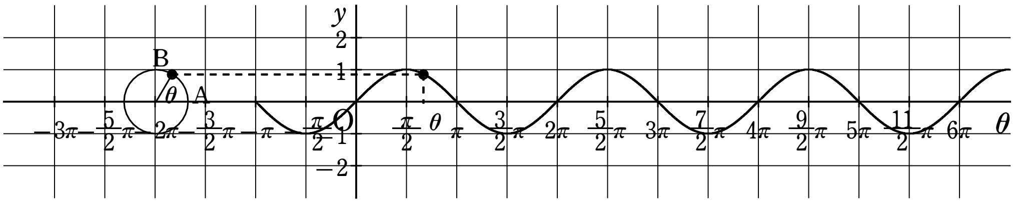
となる。これらのことを用いて，関数

$y = \sin\theta,\ y = \cos\theta$

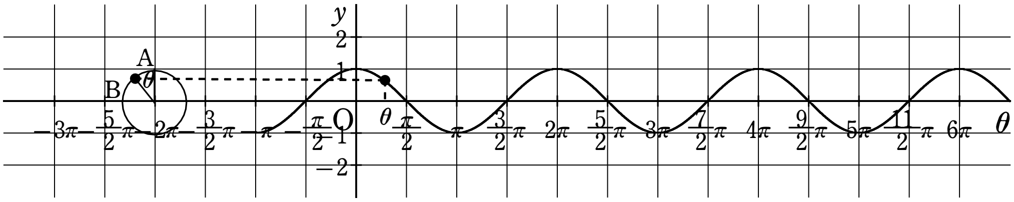
のグラフをかくことを考えます。



$y = \sin\theta$



$y = \cos\theta$



$\cos\theta = a$ であるから，$y = \cos\theta$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフをかく際に利用した円を 90° 反時計回りに回転させ，円の中心から A へと結んだ半直線を始線として，点 P の y 座標の値が，θ における y の値になります。すなわち，$\cos\theta = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立ち，$y = \cos\theta$ は $y = \sin\theta$ を θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものです。

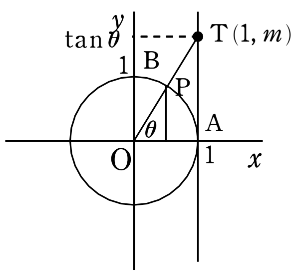
$y = \sin\theta$ や $y = \cos\theta$ のグラフの形をした曲線を**正弦曲線**や**サインカーブ**といいます。

右の図のように，角 θ の動径と単位円の交点を P とし，単位円の周上の点 $\mathrm{A}(1, 0)$ における接線と直線 OP の交点を $\mathrm{T}(1, m)$ とすると，

$\tan\theta = m$

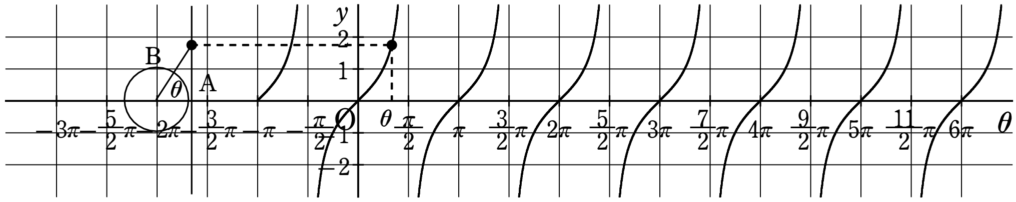
となる。このことを用いて，関数

$y = \tan\theta$



のグラフをかくことを考えます。

$y=\tan\theta$



$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えると，関数 $y=\tan\theta$ のグラフは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ に近づくにしたがって，直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づきます。

このように，グラフが一定の直線に限りなく近づくとき，その直線を，そのグラフの**漸近線**といいます。

$y=\tan\theta$ のグラフは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ (n は整数) を漸近線にもちます。

(4) 三角関数のグラフの性質

一般に，関数 $f(x)$ において

常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ は**奇関数**

常に $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ は**偶関数**

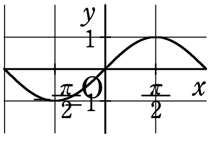
であるといいます。奇関数のグラフは，原点に関して対称であり，偶関数のグラフは，y 軸に関して対称です。

$\sin(-\theta)=-\sin\theta, \cos(-\theta)=\cos\theta, \tan(-\theta)=-\tan\theta$

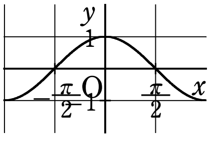
が成り立つので，

$y=\sin\theta, y=\tan\theta$ は奇関数，$y=\cos\theta$ は偶関数です。

$y=\sin\theta$



$y=\cos\theta$



一般に，関数 $f(x)$ において，0 でない定数 p があって，等式

$f(x+p)=f(x)$ が，x のどんな値に対しても成り立つとき，$f(x)$ は p を**周期**とする**周期関数**であるといいます。このとき，

$f(x+2p)=f((x+p)+p)=f(x+p)=f(x)$

となるから，$2p$ も周期です。同様に，$3p, -p, -2p$ なども $f(x)$ の周期であり，周期関数の周期は無数にあります。

普通，周期といえば，そのうちの正で最小のものを意味します。

$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta, \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta, \tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

が成り立つので，

$y=\sin\theta, y=\cos\theta$ は 2π を周期とする周期関数であり，

$y=\tan\theta$ は π を周期とする周期関数です。

これは，関数 $y=\sin\theta, y=\cos\theta$ のグラフでは 2π ごとに同じ形が繰り返され，関数 $y=\tan\theta$ のグラフでは π ごとに同じ形が繰り返されることを意味しています。

例4

曲線 $y=f(x)$ を原点に関して対称な位置に移し，次に x 軸の正の方向に a だけ平行移動した曲線を表す方程式は，$y=\boxed{}$ である．

解説

$y=f(x)$ を原点に関して対称な位置に移すと

$y=-f(-x)$

さらに x 軸の正の方向に a だけ平行移動すると

$y=-f(-(x-a))$

$\therefore y=-f(-x+a)$

例5

関数 $f(x)$ は次の 2 つの条件を満たす．

(A)　$0\leqq x<1$ のとき $f(x)=x$

(B)　すべての実数 x に対して $f(x+1)=-f(x)+1$ が成り立つ．

このとき，方程式 $f(x)-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$ の解を求めよ．

解説

(B)より

$f(x+2)=-f(x+1)+1=-\{-f(x)+1\}+1=f(x)$

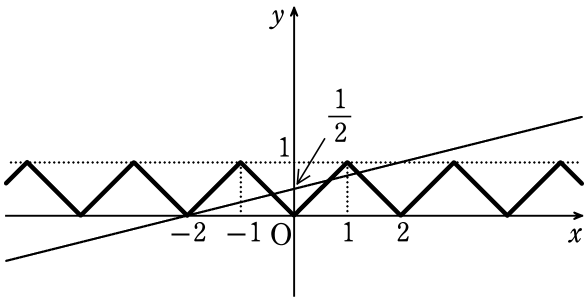
よって，関数 $f(x)$ は周期 2 の周期関数である

$f(x+1)=-f(x)+1$ より $f(x)=-f(x-1)+1$

$1\leqq x<2$ のとき，$0\leqq x-1<1$ であるから $f(x-1)=x-1$ より

$f(x)=-(x-1)+1=-x+2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは図の太線のようになる



方程式 $f(x)-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}=0$ の解は $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ の共有点のx座標と一致から，グラフより

$$x=-2,\ -\frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{5}$$

例6

(1) 関数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフを $-\pi\leqq x\leqq\pi$ の範囲でかけ。

(2) 関数 $y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは $y=2\sin 3x$ のグラフを x 軸方向に $^{ア}\boxed{}$ だけ平行移動したものであり，その正で最小の周期は $^{イ}\boxed{}$ である。

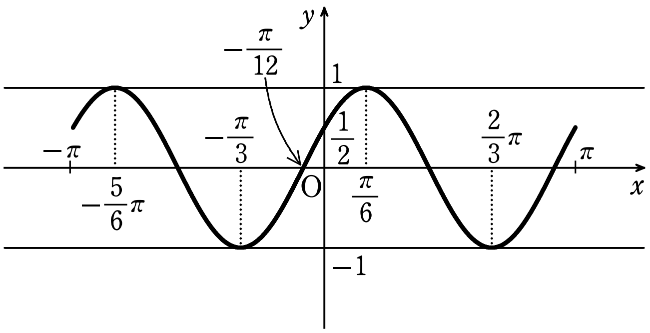
解説

(1) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ より， $y=\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

この関数のグラフは $y=\sin 2x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{12}$ だけ平行移動したものである

$y=\sin 2x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に拡大したものであるから，グラフは下図のようになる

注 一般に， $y=\sin ax$, $y=\cos ax$, $y=\tan ax$ のグラフは， それぞれ $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍に拡大したものである。



(2) $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ より， $y=2\sin 3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

よって， $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは$y=2\sin 3x$ のグラフを

x軸方向に ${}^{ア}-\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものであり，

その正で最小の周期は ${}^{イ}\frac{2\pi}{3}$ である

例7

図に示す三角関数のグラフがある．このグラフを表す関数は

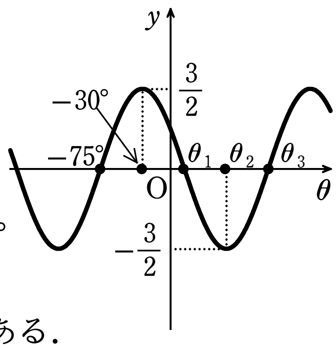
$y={}^{ア}\boxed{}\cos\left({}^{イ}\boxed{}\theta+{}^{ウ}\boxed{}^\circ\right)$

である．よって，

$\theta_1={}^{エ}\boxed{}^\circ$，$\theta_2={}^{オ}\boxed{}^\circ$，$\theta_3={}^{カ}\boxed{}^\circ$

となる．また，この関数の周期は${}^{キ}\boxed{}^\circ$ である．

ただし，$0<{}^{ウ}\boxed{}<180$ とする．



解説

グラフは $y=\frac{3}{2}\cos 2\theta$ を θ 軸方向の負の向きに 30° だけ平行移動したものであるから，求める関数は

$y=\frac{3}{2}\cos 2(\theta+30^\circ)$ ，すなわち $y=\frac{3}{2}\cos(2\theta+60^\circ)$

$\theta_1=15^\circ$，$\theta_2=60^\circ$，$\theta_3=105^\circ$

周期は180°

確認問題1

a を定数とし，x の 2 次方程式 $2x^2-(4a-1)x-2a=0$ を考える。

(1)　この方程式が重解をもつような a の値は ア$\boxed{}$ であり，そのときの重解は $x=$ イ$\boxed{}$ である。

(2)　この方程式が異なる 2 つの実数解をもち，それらの解が $0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす θ を用いて $x=\cos\theta$，$\sin\theta$ と表されるとき，$a=$ ウ$\boxed{}$ であり，$\theta=$ エ$\boxed{}$ である。

解説

(1) $2x^2-(4a-1)x-2a=0$ の判別式を D とすると

この方程式が重解をもつとき，$D=0$ より

$$D=(4a-1)^2-4\cdot2\cdot(-2a)=16a^2+8a+1=(4a+1)^2=0$$

$$\therefore\ a=^{ア}-\frac{1}{4}$$

重解は，$x=\dfrac{4a-1}{2\cdot2}=^{イ}-\dfrac{1}{2}$

(2) 解と係数の関係より

$$\cos\theta+\sin\theta=\frac{4a-1}{2}\ \cdots①$$

$$\sin\theta\cos\theta=-a$$

$(\cos\theta+\sin\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$　より

$$\left(\frac{4a-1}{2}\right)^2=1-2a$$

$$(4a-1)^2=4(1-2a)$$

$$a^2=\frac{3}{16}\qquad\therefore\ a=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$　より $\sin2\theta=-2a$

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき

$$\sin2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\ 2\theta=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\qquad\therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$$

①より，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

$a=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき

$$\sin 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore\ 2\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}$$

これらは①を満たさない

よって，$a=$ ウ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であり，$\theta=$ エ $\dfrac{2}{3}\pi$ である。

確認問題2

$y=\sin 2x$ のグラフを x 軸方向へ a だけ，y 軸方向へ b だけ平行移動したら，$y=-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2$ のグラフと一致した。定数 a，b の値を求めよ。ただし，$0\leqq a\leqq\pi$ とする。

解説

$$\begin{aligned}-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) &=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\\ &=\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi-\pi\right)\\ &=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

$y=-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2$ は，$y=\sin 2x$ のグラフを

x 軸方向に $\dfrac{\pi}{12}$，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである

よって，$a=\dfrac{\pi}{12}$，$b=-2$