1.2　直線

(1) **直線の方程式**

　x, y の方程式を満たす点 (x, y) の全体からできる図形のことを**方程式の表す図形**といい，その方程式を**図形の方程式**といいます。

　一般に， x, y の 1次方程式 $ax+by+c=0$ は

　$b \fallingdotseq 0$ のとき，傾き $-\dfrac{a}{b}$ の直線 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ を表し，

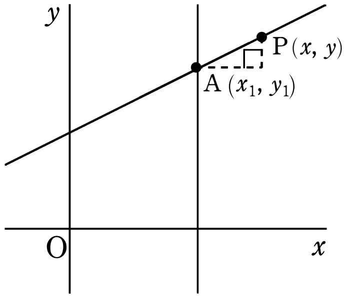
　$b=0$ のとき， x 軸に垂直な直線 $x=-\dfrac{c}{a}x$ を表します。

逆に，座標平面上のすべての直線は，次の 1次方程式の形で表されます。

　$ax+by+c=0$ (a, b, c は定数， $a \fallingdotseq 0$ または $b \fallingdotseq 0$)

この形の直線の方程式を直線の方程式の**一般形**といいます。

　次に，点 A (x_1, y_1) を通る直線 l の方程式を求めます。



l の傾きが m のとき，
直線上の点を P (x, y) とすると，
直線は変化の割合が一定であり，
変化の割合＝傾きであったから

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m \quad (x \fallingdotseq x_1)$$

$$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1)$$

これと (x_1, y_1) を合わせて

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

l が x 軸に垂直であるとき， l の方程式は

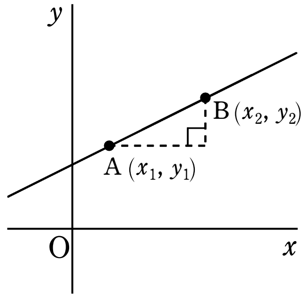
$$x=x_1$$

この形の直線の方程式を直線の方程式の**標準形**といいます。

直線の方程式 (標準形)
1. 点 (x_1, y_1) を通り，傾きが m の直線の方程式は
　$y-y_1=m(x-x_1)$
2. 点 (x_1, y_1) を通り， x 軸に垂直な直線の方程式は
　$x=x_1$

次は，異なる 2 点 A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) を通る直線の方程式を求めます。

$x_1 \neq x_2$ のとき，直線 AB の傾きを m とすると，



$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ であるから

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

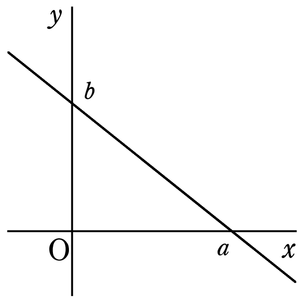
$x_1=x_2$ のとき，直線 AB は x 軸に垂直であるから

$$x=x_1$$

直線の方程式 (**標準形**) 2 異なる 2 点 A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) を通る直線の方程式は 1. $x_1 \neq x_2$ のとき，　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ 2. $x_1=x_2$ のとき，　$x=x_1$

直線が x 軸, y 軸とそれぞれ点 $(a, 0)$, $(0, b)$ で交わるとき， a をこの直線の x **切片**， b をこの直線の y **切片**といいます。

$a, b \neq 0$ のとき， x 切片が a ， y 切片が b である直線の方程式を求めます。



この直線は $(a, 0)$ を通り，

傾きが $\dfrac{b-0}{0-a}=-\dfrac{b}{a}$ より

$$y-0=-\frac{b}{a}(x-a)$$

$$y=-\frac{b}{a}x+b \qquad \therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

この直線の方程式を直線の方程式の**切片形**といいます。

直線の方程式 (**切片形**) $a, b \neq 0$ のとき， x 切片が a ， y 切片が b である直線の方程式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

例1

(1) 2 直線 $3x-y-1=0$, $x+2y-12=0$ の交点を通り，傾きが 2 の直線の y 切片の値を求めよ。

(2) 2 点 A$(1, 2)$, B$(2, 1)$ を通る直線が点 C$(a, a-3)$ を通るとき，a の値を求めよ.

解説

(1) $3x-y-1=0$, $x+2y-12=0$ の交点は

これらを連立して解いて，$(2, 5)$

点 $(2, 5)$ を通り，傾きが 2 の直線の方程式は

$$y-5=2(x-2)$$

$$\therefore\ y=2x+1$$

(2) A, B を通る直線の方程式は

$$y-2=\frac{1-2}{2-1}(x-1) \quad \therefore\ y=-x+3$$

この直線が，C$(a, a-3)$ を通るとき

$$a-3=-a+3 \quad \therefore\ a=3$$

例2

2 点 A$(-1, 5)$, B$(3, 2)$ に対して，直線 $y=mx-2m-1$ が線分 AB (両端を含む) と共有点をもつような定数 m の範囲は，$m \leqq$ ア $\boxed{\quad}$，$m \geqq$ イ $\boxed{\quad}$ である。

解説

$y=mx-2m-1$

$=m(x-2)-1$

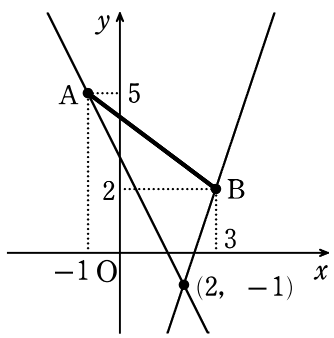
この直線は点 $(2, -1)$ を通り，傾き m の直線である。

A を通るとき， $m=-2$

B を通るとき， $m=3$

右の図より

$m \leqq$ ア-2，$m \geqq$ イ3



例3

a が定数のとき，直線 ℓ：$(1+3a)x-(2+a)y=2-9a$ は a の値にかかわらず，定点 $^{ア}\boxed{}$ を通る。a の値の範囲が $^{イ}\boxed{}$ のとき，直線 ℓ は第 1 象限を通る。

(解説)

(ア) $(1+3a)x-(2+a)y=2-9a$

$$a(3x-y+9)+x-2y-2=0$$

これが任意の a で成り立つとき，

$$3x-y+9=0,\quad x-2y-2=0 \qquad \therefore x=-4,\ y=-3$$

よって，直線 ℓ は定点 $^{ア}(-4,\ -3)$ を通る。

(イ) $a=-2$ のとき，直線 ℓ は $x=-4$ となり

第 1 象限を通らないから不適

$a\fallingdotseq-2$ のとき直線 ℓ は

$$y=\frac{3a+1}{a+2}x+\frac{9a-2}{a+2}$$

定点 $(-4,\ -3)$ を通るから

直線 ℓ が第 1 象限を通るのは傾きが正のときより

$$\frac{3a+1}{a+2}>0$$

$$(a+2)(3a+1)>0 \qquad \therefore a<-2,\ -\frac{1}{3}<a$$

よって，求める a の値の範囲は

$$^{イ}a<-2,\ -\frac{1}{3}<a$$

(2) 2 直線の関係

2 直線が交わるとき，それらの交点は，それらの連立方程式とみて解くことにより求まります。

例4

(1) xy 平面上の 3 直線 $x+y=3$，$2x-y=0$，$ax-2y=5$ は，$a=\boxed{}$ のとき，1 点で交わる.

(2) 3 直線 $2x-y+4=0$，$5x-4y-k=0$，$x+ky+22=0$ が同一の点で交わるとき，k $(k>0)$ の値を求めよ。

(解説)

(1) $x+y=3$ …①, $2x-y=0$ …②, $ax-2y=5$ …③とおく

①，②の交点は，$(1, 2)$

①，②，③が1点で交わるとき，③がこの交点を通るから，

$a\cdot1-2\cdot2=5 \quad \therefore a=9$

(2) 3直線が1点で交わるとき，交点を (X, Y) とすると

$2X-Y+4=0$ …①, $5X-4Y-k=0$ …②, $X+kY+22=0$ …③

①より，$Y=2X+4$

②より，$k=5X-4Y=-3X-16$

③より

$X+(-3X-16)(2X+4)+22=0$

$6X^2+43X+42=0$

$(X+6)(6X+7)=0 \quad \therefore X=-6, -\dfrac{7}{6}$

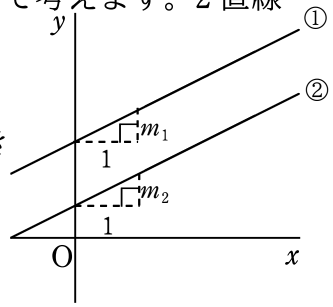
$k>0$ より，$k=2$

2直線が平行あるいは垂直となる条件について考えます。2直線

$y=m_1x+n_1$ …①

$y=m_2x+n_2$ …②

が平行であるのは，それらの傾きが等しいときである。よって，次のことが成り立ちます。



2直線①，②が平行 $\Leftrightarrow m_1=m_2$

(一致も平行に含むこととする)

注 $m_1=m_2, n_1=n_2$ のとき，①と②は一致します。平行と一致を別のものとみるときは，$m_1=m_2$ は平行であるための必要条件となります。

次に，2直線①，②が垂直ならば，それらに平行で原点Oを通る2直線

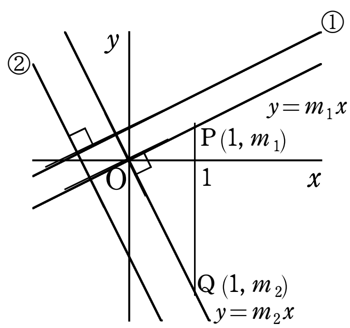
$y=m_1x, y=m_2x$

も垂直である。

これらの直線上にそれぞれ点

$P(1, m_1)$, $Q(1, m_2)$ をとると，

△OPQ は ∠POQ$=90^\circ$ の直角三角形より



$OP^2+OQ^2=PQ^2$

$(1+m_1{}^2)+(1+m_2{}^2)=(m_1-m_2)^2$

　$\therefore\ m_1m_2=-1$
逆に $m_1m_2=-1$ が成り立てば，逆をたどって
$y=m_1x,\ y=m_2x$ は垂直であることが示せます。

2 直線の平行・垂直 (標準形)
2 直線 $y=m_1x+n_1,\ y=m_2x+n_2$ について
　2 直線が平行 $\Leftrightarrow m_1=m_2$ (一致も含む)
　2 直線が垂直 $\Leftrightarrow m_1m_2=-1$

例5
(1) 点 (2，-3) を通り，直線 $y=3x-5$ に平行な直線と，垂直な直線の方程式を求めよ．
(2) $a\fallingdotseq 0$ とする。2 つの関数 $y=\left(\frac{1}{3}a+\frac{3}{2}\right)x-\frac{1}{4}$，$y=\left(\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}\right)x+\frac{5}{9}$ のグラフが平行になるのは $a=$ ア$\boxed{}$ のときである。また，垂直になるのは $a=$ イ$\boxed{}$ のときである。

(解説)
(1) 平行な直線の方程式は
　$y+3=3(x-2)\quad \therefore\ y=3x-9$
垂直な直線の方程式は
　$y+3=-\frac{1}{3}(x-2)\quad \therefore\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$
(2) 平行になるとき
　$\frac{1}{3}a+\frac{3}{2}=\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}\quad \therefore\ a=$ ア -26
垂直になるとき，
　$\left(\frac{1}{3}a+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}\right)=-1$
　$6a^2+11a=0$
　$a(6a+11)=0$
$a\fallingdotseq 0$ より，$a=$ イ $-\frac{11}{6}$

次は，2 直線

$a_1x+b_1y+c_1=0$ …①

$a_2x+b_2y+c_2=0$ …②

が平行あるいは垂直になる条件について考えます。

$b_1, b_2 \fallingdotseq 0$ のとき，①，②は

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}$$

$$y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}$$

と変形できます。

よって，①と②が平行であるとき

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}$$

$\therefore\ a_1b_2-b_1a_2=0$ …③

$b_1=0$ のとき，①は x 軸に垂直な直線であり，

②も x 軸に垂直な直線より $b_2=0$ である。

よって，③は成り立ちます。

同様にして $b_2=0$ のときも $b_1=0$ であり，③は成り立ちます。

以上より，①と②が平行であるとき

$a_1b_2-b_1a_2=0$

注 この条件も平行と一致を区別するとき， $a_1b_2-b_1a_2=0$ は必要条件でしかありません。平行であることや一致することを言うためには，それを示さなければなりません。

①と②が垂直であるとき，

$$-\frac{a_1}{b_1}\cdot\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1 \text{ …④}$$

$\therefore\ a_1a_2+b_1b_2=0$ …⑤

$b_1=0$ のとき，①は x 軸に垂直な直線であり，

②は y 軸に垂直な直線より $a_2=0$ である。

よって，⑤は成り立ちます。

同様にして $b_2=0$ のときも $a_1=0$ であり，⑤は成り立ちます。

以上より，①と②が垂直であるとき

$a_1a_2+b_1b_2=0$

2 直線の平行・垂直 (一般形)
2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ について
　2 直線が平行 $\Leftrightarrow$ $a_1b_2-b_1a_1=0$ (一致も含む)
　2 直線が垂直 $\Leftrightarrow$ $a_1a_2+b_1b_2=0$

例6
(1) 点 (2, 1) を通り, 直線 $2x-3y+7=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ
.
(2) 直線 $(a-1)x-4y+2=0$ と直線 $x+(a-5)y+3=0$ は, $a=$ ア $\boxed{}$
のとき垂直に交わり, $a=$ イ $\boxed{}$ のとき平行となる.
(3) a, b を定数とする。直線 $2x+3y+4=0$ と直線 $4x+ay+b=0$ が共有点をもたないための必要十分条件は,「$a=$ ア $\boxed{}$ かつ $b\neq$ イ $\boxed{}$」である。

解説
(1) $2x-3y+7=0$ に垂直な直線は
　$3x+2y+c=0$
とおける
これが (2, 1) を通るから
　$3\cdot2+2\cdot1+c=0$　$\therefore\ c=-8$
よって, 求める直線は
　$3x+2y-8=0$

別解
$2x-3y+7=0$ より, $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{3}$
求める直線はこの直線に垂直, すなわち傾きが $-\dfrac{3}{2}$ で
点 (2, 1) を通るから
　$y-1=-\dfrac{3}{2}(x-2)$　$\therefore\ y=-\dfrac{3}{2}x+4$　$\therefore\ 3x+2y-8=0$
(2) 垂直になるとき
　$(a-1)\cdot1+(-4)\cdot(a-5)=0$　$\therefore\ a=\dfrac{19}{3}$

平行になるとき

$(a-1)(a-5)-(-4)\cdot 1=0$

$a^2-6a+9=0$

$(a-3)^2=0 \quad \therefore\ a=3$

(3) 2 直線が共有点をもたないのは，2 直線が平行であり，かつ一致しないときである

2 直線が平行であるためには

$2a-3\cdot 4=0 \quad \therefore\ a=6$ であることが必要

このとき，$4x+ay+b=0$ は

$4x+6y+b=0$

$2x+3y+\dfrac{b}{2}=0$

一致しないためには

$\dfrac{b}{2}\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 4 \quad \therefore\ b \neq 8$

以上より，求める条件は

$a=6,\ b\neq 8$

例7

3 直線 $x-y=-1$，$3x+2y=12$，$kx-y=k-1$ が，三角形を作らないような定数 k の値を求めよ．

解説

$x-y=-1$ …①, $3x+2y=12$ …②, $kx-y=k-1$ …③とおく

3 直線が三角形を作らないのは，

3 直線が同じ点を通るとき

2 直線が平行 (一致する場合も含む) のとき

である．

(i) 3 直線が同じ点を通るとき

①と②の交点の座標は (2，3)

この点を③が通ればよいから

$2k-3=k-1 \quad \therefore\ k=2$

(ii) ①と③が平行のとき

$1\cdot(-1)-(-1)\cdot k=0 \quad \therefore\ k=1$

(ⅲ) ②と③が平行のとき

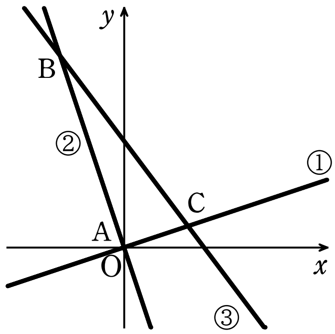
$3\cdot(-1)-2k=0 \quad \therefore k=-\dfrac{3}{2}$

以上より，

$k=-\dfrac{3}{2}, 1, 2$

例8 3 つの直線 $x-3y=0$，$3x+y=0$，$4x+3y=10$ で囲まれた三角形の面積は $^{ア}\boxed{}$ であり，外接円の半径は $^{イ}\boxed{}$ である。

解説



(ア) $\begin{cases} x-3y=0 \cdots ① \\ 3x+y=0 \cdots ② \\ 4x+3y=10 \cdots ③ \end{cases}$ とする

①，②の交点を A とすると， A$(0,\ 0)$

②，③の交点を B とすると， B$(-2,\ 6)$

③，①の交点を C とすると， C$\left(2,\ \dfrac{2}{3}\right)$

①，②において

$1\cdot3+(-3)\cdot1=0$

より，①と②は垂直である

$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2)^2+6^2}=2\sqrt{10}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ より

求める面積は

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{3}=\dfrac{20}{3}$

(イ) $\angle\mathrm{BAC}=90°$ であるから，外接円の半径は

$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\left(\dfrac{2}{3}-6\right)^2}=\dfrac{10}{3}$

注 直角三角形であると，面積や外接円の半径等求めやすくなるものがあります。図形問題を解くときは，まず直角があるかどうかを確認するとよい。

例9

2 点の座標を A(7，5)，B(−1，1) とする。線分 AB の垂直二等分線の y 軸上の切片の値を求めよ。

(解説)

線分 AB の中点の座標は，

$$\left(\frac{7+(-1)}{2},\ \frac{5+1}{2}\right)=(3,\ 3)$$

直線 AB の傾きは $\dfrac{5-1}{7-(-1)}=\dfrac{1}{2}$ より

垂直二等分線の傾きは -2 より

線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y-3=-2(x-3) \qquad \therefore\ y=-2x+9$$

よって，y 軸上の切片の値は 9

例10

3 点 O(0，0)，A(7，2)，B(3，6) について，次のものを求めよ.

(1) △OAB の重心の座標　　(2) △OAB の垂心の座標

(3) △OAB の外心の座標

(解説)

(1) $\left(\dfrac{0+7+3}{3},\ \dfrac{0+2+6}{3}\right)=\left(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$

(2) 垂心は三角形の各頂点から対辺に引いた垂線の交点である

直線 OA の傾きは $\dfrac{2}{7}$ より，OA に垂直な直線の傾きは $-\dfrac{7}{2}$

B を通り OA に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{7}{2}(x-3)+6 \qquad \therefore\ y=-\frac{7}{2}x+\frac{33}{2}$$

直線 OB の傾きは 2 より，OB に垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

A を通り OB に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}(x-7)+2 \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$$

垂心はこれらの交点より

$$\left(\frac{11}{3},\ \frac{11}{3}\right)$$

(3) 外心は三角形の各辺の垂直二等分線の交点である
線分 OA の垂直二等分線は

$$y-1=-\frac{7}{2}\left(x-\frac{7}{2}\right) \quad \therefore\ y=-\frac{7}{2}x+\frac{53}{4}$$

線分 OB の垂直二等分線は

$$y-3=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) \quad \therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}$$

外心はこれらの交点より

$$\left(\frac{19}{6},\ \frac{13}{6}\right)$$

(3) **直線に関して対称な点**
2 点 A, B が直線 l に関して対称であることは,
直線 AB は l に垂直である　かつ
線分 AB の中点は l 上にある
と同値です。

例11 平面上に 2 点 A$(-1,\ 3)$, B$(5,\ 11)$ がある。 (1)　直線 $y=2x$ について，点 A と対称な点 P の座標を求めよ。 (2)　点 Q が直線 $y=2x$ 上にあるとき，QA＋QB を最小にする点 Q の座標を求めよ。

解説

(1) 直線 $y=2x$ を ℓ とし，点 P の座標を $(p,\ q)$ とする
AP$\perp\ell$ であるから，$p\neq-1$ で

$$\frac{q-3}{p+1}\cdot 2=-1 \quad \therefore\ p+2q=5 \cdots ①$$

線分 AP の中点 $\left(\frac{p-1}{2},\ \frac{q+3}{2}\right)$ は ℓ 上にあるから

$$\frac{q+3}{2}=2\cdot\frac{p-1}{2} \quad \therefore\ 2p-q=5 \cdots ②$$

①，②より，　$p=3,\ q=1$
よって，点 P の座標は $(3,\ 1)$

(2) 2点 A, Bは，直線 ℓ に関して同じ側にある

QA=QP から QA+QB=QP+QB より

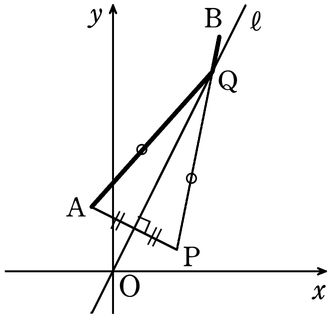
QA+QBが最小となるのは

QP+QBが最小となるときである

QP+QBが最小となるのは

3点 P, Q, Bが1直線上にあるとき

直線 PBの方程式は



$$y-1=\frac{11-1}{5-3}(x-3) \quad \therefore\ y=5x-14$$

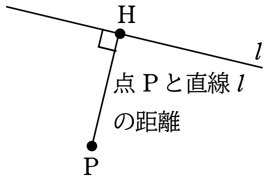
これと $y=2x$ の交点は $\left(\frac{14}{3},\ \frac{28}{3}\right)$

これがP, Q, Bが1直線上，

すなわちQA+QBが最小となるときの Q である

(4) **点と直線の距離**

点 Pから直線 l に下した垂線を PH とすると，点 Pと直線 l の距離 d は線分 PH の長さで表されます。



d を求める公式を導きます。

最近では大学入試でもよく出題されるので，導き方も理解しておいた方がよい。次は大阪大の入試問題です。

例12

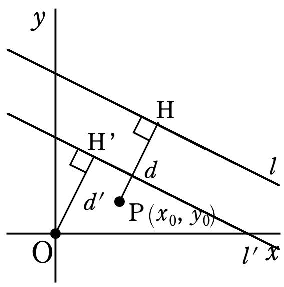
xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。

(解説)

$\mathrm{P}(x_0, y_0)$， $l\colon ax+by+c=0$ とおく

l を x 軸方向に $-x_0$， y 軸方向に $-y_0$ だけ平行移動したものを l' とすると，



$$l'\colon a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$$

$$ax+by+ax_0+by_0+c=0$$

$c'=ax_0+by_0+c$ とおくと

$$ax+by+c'=0$$

Pと l との距離 d は，Oと l' の距離 d' に等しい
Oから l' に下した垂線の足をH'とすると，
直線OH' は l' に垂直であり，原点Oを通るから

$$bx-ay=0$$

OH'と l' の交点は

$$\left(-\frac{ac'}{a^2+b^2},\ -\frac{bc'}{a^2+b^2}\right)$$

よって

$$\begin{aligned} d' &= \sqrt{\left(-\frac{ac'}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\frac{bc'}{a^2+b^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)c'^2}{(a^2+b^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{c'^2}{a^2+b^2}} \\ &= \frac{|c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

したがって

$$d=d'=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例13

(1) 点 (1，2) と直線 $y=-\dfrac{3}{4}x-1$ の距離を求めよ．

(2) k を定数とする．点 (2，1) から直線 $kx+y+1=0$ へ下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように，k の値を定めよ．

解説

(1) $y=-\dfrac{3}{4}x-1$ より，$3x+4y+4=0$

点 (1，2) と $3x+4y+4=0$ の距離は

$$\frac{|3\cdot1+4\cdot2+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$$

(2) 点 (2，1) と直線 $kx+y+1=0$ の距離が $\sqrt{3}$ より

$$\frac{|2k+1+1|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\sqrt{3}$$

$|2(k+1)|=\sqrt{3(k^2+1)}$

$4(k+1)^2=3(k^2+1)$

$k^2+8k+1=0 \quad \therefore\ k=-4\pm\sqrt{15}$

例14

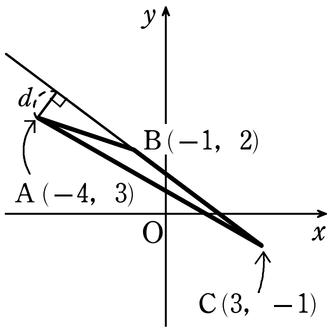
(1) 3 点 A$(-4,\ 3)$，B$(-1,\ 2)$，C$(3,\ -1)$ について，点 A と直線 BC の距離を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

(解説)

直線 BC の方程式は

$$y-2=\frac{-1-2}{3+1}(x+1)$$

$$\therefore\ 3x+4y-5=0$$



点 A と直線 BC の距離を d とすると

$$d=\frac{|3\cdot(-4)+4\cdot3-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=5$ より

△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot5\cdot1=\frac{5}{2}$$

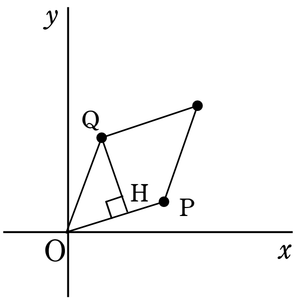
例15

平面上に原点 O とは異なる 2 点 P$(a,\ b)$，Q$(c,\ d)$ を O，P，Q が一直線上にないようにとる．このとき，OP，OQ を 2 辺とする平行四辺形の面積は $|ad-bc|$ であることを証明せよ．

(解説)

直線 OP の方程式は

$$bx-ay=0$$



点 Q から直線 OP に垂線 QH を引くと

$$\mathrm{QH}=\frac{|bc-ad|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=\frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって，平行四辺形の面積 S は

$$S=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{QH}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=|ad-bc|$$

この結果より，以下の三角形の公式が導かれます。

三角形の面積
A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) のとき，△OABの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-y_1x_2|$$

注 この公式は平面内(2次元)でしか使えません。また，三角形の頂点の1つが原点でなければ使えません。頂点が3点とも原点でないときは，平行移動して頂点のどれかを原点に移動すれば使えます。

例16
座標平面上の原点Oと2点(2，4)，(−3，3)を頂点とする三角形の面積は $\boxed{}$ である。

解説
求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|2\cdot3-(-3)\cdot4|=\frac{1}{2}\cdot18=9$$

例17
(1) 直線 $y=2\sqrt{2}x$ と x 軸がなす鋭角を2等分する直線の方程式を求めよ。
(2) 2直線 $y=x$ と $y=3x$ のなす角 θ（$0°<\theta<90°$）の2等分線の方程式を求めよ．

解説
(1) $y=2\sqrt{2}x$ は $2\sqrt{2}x-y=0$ であり，これを l とする
求める角の二等分線上の点をP(x, y)とすると，
Pと l との距離とPと x 軸との距離が等しいから，

$$\frac{|2\sqrt{2}x-y|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=|y|$$

$$|2\sqrt{2}x-y|=3|y|$$

$$2\sqrt{2}x-y=\pm3y \qquad \therefore\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x,\ y=-\sqrt{2}x$$

条件を満たすのは，　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

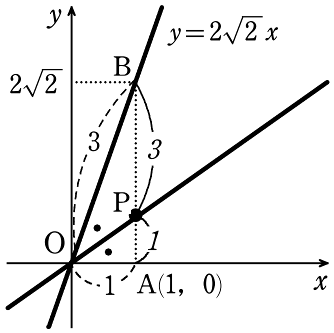
注 絶対値を外す際，

$x\geqq0$ のとき，Pは $0<y<2\sqrt{2}x$ の領域にあるので $y>0,\,2\sqrt{2}x-y>0$

$x<0$ のとき，Pは $2\sqrt{2}x<y<0$ の領域にあるので $y<0,\,2\sqrt{2}x-y<0$

を利用すれば1通りに決まります。

別解



A(1，0)，B(1，$2\sqrt{2}$) とすると

OA＝1，OB＝3

∠AOBの二等分線とABの交点をPとおくと，角の二等分線の定理より

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=1:3$

よって，Pの y 座標は

$$\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\therefore\ \mathrm{P}\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

したがって，求める直線の方程式は

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

別解

$\tan2\theta=2\sqrt{2}$ とおくと

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\tan^2\theta+\tan\theta-\sqrt{2}=0$$

$$(\sqrt{2}\tan\theta-1)(\tan\theta+\sqrt{2})=0$$

$\tan\theta>0$ より，　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

(2) 求める直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

Pと $y=x$ ($x-y=0$)の距離と，Pと $y=3x$ ($3x-y=0$)の距離が等しいから

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\frac{|3x-y|}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{5}(x-y)=\pm(3x-y)$$

$$(\sqrt{5}-1)y=(\sqrt{5}-3)x,\ (\sqrt{5}+1)y=(\sqrt{5}+3)x$$

条件を満たすのは

$$y=\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1}x \quad \therefore\ y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

別解

求める直線を $y=mx\,(1<m<3)$ とおく

直線 $y=x$，$y=3x$，$y=mx$ と直線 $x=1$ の交点を順に A, B, C とすると

角の二等分線の定理より

$$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=\sqrt{1^2+1^2}:\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{2}:\sqrt{10}$$

AB$=2$ より

$$m=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{10}}\cdot 2+1=\frac{2}{\sqrt{5}+1}+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

よって

$$y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$$

例18

座標平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$ について，次の問いに答えよ.

(1)　点 P と直線 $y=mx$ との距離は $\dfrac{|ma-b|}{\sqrt{1+m^2}}$ であることを示せ.

(2)　点 P を中心とする円 O が 2 直線 $y=\dfrac{5}{12}x$，$y=\dfrac{4}{3}x$ の両方に接するとき，b を a を用いて表せ.

(3)　(2) の条件を満たす円 O の半径が 6 であるとき，a，b の値を求めよ.

解説

(1) 点と直線の距離。省略

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と 2 直線 $y=\dfrac{5}{12}x$，$y=\dfrac{4}{3}x$ との距離は,

ともに円 O の半径であるから,

$$\frac{\left|\dfrac{5}{12}a-b\right|}{\sqrt{1+\dfrac{25}{144}}}=\frac{\left|\dfrac{4}{3}a-b\right|}{\sqrt{1+\dfrac{16}{9}}}$$

$\dfrac{12}{13}\left|\dfrac{5}{12}a-b\right|=\dfrac{3}{5}\left|\dfrac{4}{3}a-b\right|$ から　$5|5a-12b|=13|4a-3b|$

$25a-60b=\pm(52a-39b)$

$25a-60b=52a-39b$ のとき

$9a=-7b \quad a>0，b>0$ より不適

$25a-60b=-(52a-39b)$ のとき

$7a=9b \quad \therefore b=\dfrac{7}{9}a$

(3) (2)より

$\dfrac{3}{5}\left|\dfrac{4}{3}a-\dfrac{7}{9}a\right|=6 \quad \therefore |a|=18$

$a>0$ より

$a=18$, $b=\dfrac{7}{9}\cdot 18=14$

確認問題1

a を定数とし，座標平面上で 3 つの直線 $2x+2y=7$ …… ①，$ax-y=1$ …… ②，$a^2x-y=a^2$ …… ③ を考える。

(1)　3 つの直線 ①，②，③ がただ 1 点で交わるとき，定数 a の値を求めよ。

(2)　3 つの直線 ①，②，③ が平面を 6 個の部分に分けるとき，定数 a の値を求めよ。

解説

(1) ①，②，③ がただ 1 点で交わるとき，

これらはどの 2 つも平行ではなく，一致もしないから

$$2\cdot(-1)-a\cdot 2 \fallingdotseq 0,\ a\cdot(-1)-(-1)\cdot a^2 \fallingdotseq 0,\ a^2\cdot 2-(-1)\cdot 2 \fallingdotseq 0$$

$$\therefore\ a \fallingdotseq -1, 0, 1$$

このとき，①，② の交点は $\left(\dfrac{9}{2(a+1)},\ \dfrac{7a-2}{2(a+1)}\right)$

③がこの点を通ればよいから

$$a^2\cdot\frac{9}{2(a+1)}-\frac{7a-2}{2(a+1)}=a^2$$

$$2a^3-7a^2+7a-2=0$$

$$(a-1)(2a-1)(a-2)=0$$

$a \fallingdotseq 1$ より，　$a=\dfrac{1}{2}$，2

(2) ①，②，③ が平面を 6 個の部分に分けるとき

(i) ①，②，③ がただ 1 点で交わる

(ii) ①，②，③ のうちの 2 つの直線のみが平行となる

(i) (1)より　$a=\dfrac{1}{2}$，2

(ii) どれか 2 つの直線が平行または一致するとき

$$2\cdot(-1)-a\cdot 2=0 \text{ または } a\cdot(-1)-(-1)\cdot a^2=0$$

$$\text{または } a^2\cdot 2-(-1)\cdot 2=0$$

$$\therefore\ a=-1, 0, 1$$

a がそれぞれの値のとき，これらは同時に起こることはない

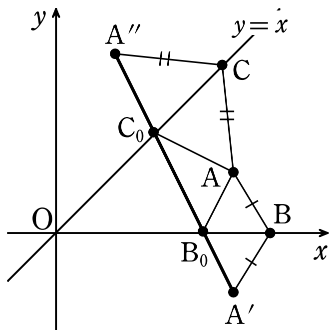
$a=1$ のとき，②，③は一致するから，求める a は $a=-1, 0$

(i)，(ii)より，　$a=-1$，0，$\dfrac{1}{2}$，2

確認問題2

xy 平面上の点 A(3，1) と，x 軸上の点 B および直線 $y=x$ 上の点 C からなる △ABC 全体からなる集合を S とする。S に属する △ABC で，周囲の長さ AB＋BC＋CA が最小になるのは，B の x 座標＝ア $\boxed{}$，C の x 座標＝イ $\boxed{}$ のときであり，そのときの周囲の長さは，AB＋BC＋CA＝ウ $\boxed{}$ である。

(解説)



A と x 軸に関して対称な点は $A'(3,\ -1)$

A と直線 $y=x$ に関して対称な点は $A''(1,\ 3)$

このとき，$AB=A'B$，$CA=CA''$ より

$$AB+BC+CA=A'B+BC+CA''$$

よって，$A'B+BC+CA''$ が最小となるとき

AB＋BC＋CA が最小となる

$A'B+BC+CA''$ が最小となるのは

A', B, C, A'' が一直線上にあるときであり

このとき，直線 $A'A''$ は

$$y-(-1)=-2(x-3) \quad \therefore\ y=-2x+5$$

B の x 座標は

$$-2x+5=0 \quad \therefore\ x=\frac{5}{2}$$

C の x 座標は

$$-2x+5=x \quad \therefore\ x=\frac{5}{3}$$

周囲の長さは

$$\sqrt{(3-1)^2+\{(-1)-3\}^2}=2\sqrt{5}$$

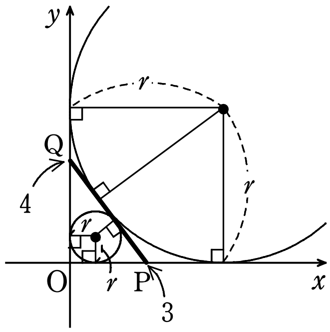
確認問題3

座標平面上に2点P(3, 0), Q(0, 4)がある。x軸, y軸, および線分PQのいずれにも接する円で, 中心が第1象限にあるものをCとする。

(1) 円Cの半径を求めよ。

(2) 円Cと線分PQの接点の座標を求めよ。

(解説)



(1) 円Cはx軸, y軸に接し, 中心が第1象限にあるから, Cの半径をr ($r>0$)とすると, 中心の座標は(r, r)

直線PQの方程式は

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1 \quad \therefore 4x+3y-12=0 \cdots ①$$

円Cが直線PQに接するとするとき

$$\frac{|4r+3r-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=r$$

$$|7r-12|=5r \quad \therefore r=1, 6$$

(2) $r=1$のとき (Cは△OPQの内接円)

中心(1, 1)を通り, 直線PQに垂直な直線の方程式は

$$y-1=\frac{3}{4}(x-1) \quad \therefore 3x-4y+1=0 \cdots ②$$

①, ②の交点が円Cと直線PQの接点より, $\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$

$r=6$のとき (Cは△OPQの傍接円)

中心(6, 6)を通り, 直線PQに垂直な直線の方程式は

$$y-6=\frac{3}{4}(x-6) \quad \therefore 3x-4y+6=0 \cdots ③$$

①, ③の交点が円Cと直線PQの接点より, $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$

確認問題4

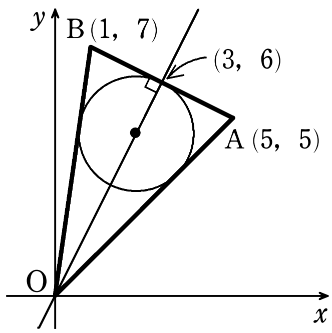
座標平面において，原点 O，点 A(5，5)，点 B(1，7) の 3 点がある。△OAB の内心，外心，垂心の座標を求める。

(1)　△OAB において，辺 OA の長さは ${}^{ア}\boxed{}$ であり，辺 OB の長さは ${}^{イ}\boxed{}$ である。∠BOA の二等分線の方程式は，$y={}^{ウ}\boxed{}$ である。△OAB の面積は ${}^{エ}\boxed{}$ であり，内接円の半径は ${}^{オ}\boxed{}$ である。したがって，△OAB の内心の座標は $\left({}^{カ}\boxed{},\ {}^{キ}\boxed{}\right)$ である。

(2)　辺 OA の垂直二等分線の方程式は，$y={}^{ク}\boxed{}$ であり，△OAB の外心の座標は $\left({}^{ケ}\boxed{},\ {}^{コ}\boxed{}\right)$ である。

(3)　△OAB の垂心の座標は，$\left({}^{サ}\boxed{},\ {}^{シ}\boxed{}\right)$ である。

解説



(1) $\mathrm{OA}=\sqrt{5^2+5^2}={}^{ア}5\sqrt{2}$，

$\mathrm{OB}=\sqrt{1^2+7^2}={}^{イ}5\sqrt{2}$

OA＝OB であるから，△OAB は二等辺三角形より，∠BOA の二等分線は線分 AB の中点 (3，6) を通る。よって，その方程式は

$y={}^{ウ}2x$

△OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|5\cdot7-5\cdot1|={}^{エ}15$$

△OAB の内接円の半径を r とすると

$S=\frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{AB}+\mathrm{OB})r$ より

$$\frac{1}{2}(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+5\sqrt{2})r=15 \qquad \therefore\ r=\frac{15}{5\sqrt{2}+\sqrt{5}}={}^{オ}\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$$

△OAB の内心は直線 $y=2x$ 上にあるから，内心の x 座標は

$$3-\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{10-\sqrt{10}}{3}$$

よって，内心の座標は

$\left(^{カ}\dfrac{10-\sqrt{10}}{3},\ \ ^{キ}\dfrac{20-2\sqrt{10}}{3}\right)$

(2) 辺 OA の垂直二等分線の方程式は

辺 OA の中点 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ を通り，OA に直交するから傾き -1 より

$$y-\frac{5}{2}=-\left(x-\frac{5}{2}\right) \qquad \therefore\ y={}^{ク}-x+5$$

また，辺 AB の垂直二等分線は $y=2x$ であり

△OAB の外心は，これらの交点であるから

$$-x+5=2x \qquad \therefore\ x=\frac{5}{3},\ y=\frac{10}{3} \qquad \therefore\left(^{ケ}\frac{5}{3},\ \ ^{コ}\frac{10}{3}\right)$$

(3) B を通り，直線 OA に垂直な直線の方程式は

$$y-7=-(x-1) \qquad \therefore\ y=-x+8$$

O を通り，直線 OA に垂直な直線の方程式は $y=2x$ であり

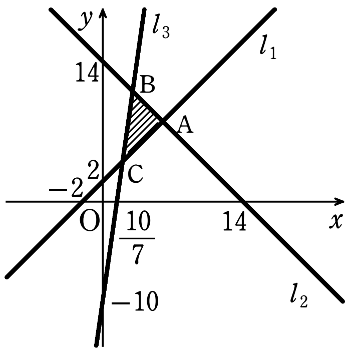
△OAB の垂心は，これらの交点であるから

$$-x+8=2x \qquad \therefore\ x=\frac{8}{3},\ y=\frac{16}{3} \qquad \therefore\left(^{サ}\frac{8}{3},\ \ ^{シ}\frac{16}{3}\right)$$

確認問題5

3 直線 l_1：$x-y+2=0$, l_2：$x+y-14=0$, l_3：$7x-y-10=0$ で囲まれる三角形に内接する円の方程式を求めよ.

(解説)



l_1 と l_2 , l_2 と l_3 , l_3 と l_1 の交点をそれぞれ A, B, C とする

A の座標は (6, 8)

$y=8$ は∠BACの二等分線より,

内接円の中心は $(a, 8)$ ($a<6$) とおける

これが, l_3 にも接するとき

$$\frac{|7a-18|}{5\sqrt{2}}=\frac{6-a}{\sqrt{2}}$$

$$|7a-18|=30-5a \quad \therefore a=4,\ -6$$

内接円の中心は $y<7x-10$ の領域にあるから,

$8<7a-10$，すなわち $a>\dfrac{18}{7}$ より， $a=4$

よって，内接する円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-8)^2=2$$

注 $a=-6$ のときは，傍接円の中心である。

別解

求める円の中心の座標を (a, b)，半径を r とする

中心 (a, b) と 3 直線 l_1，l_2，l_3 との距離がそれぞれ半径に等しいから

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}}=\frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}}=r$$

点 (a, b) は三角形の内部の点であるから

$$a-b+2<0,\ a+b-14<0,\ 7a-b-10>0$$

よって

$$\frac{-a+b-2}{\sqrt{2}}=\frac{-a-b+14}{\sqrt{2}}=\frac{7a-b-10}{5\sqrt{2}}=r$$

$$\therefore a=4,\ b=8,\ r=\sqrt{2}$$

したがって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-8)^2=2$$