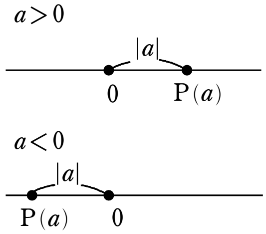
第1章　図形と方程式

1.1　点

(1) 直線上の点

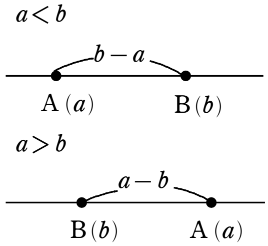
数直線上において，点 P には 1 つの実数 a が対応しています。このとき， a を点 P の座標といい，座標が a である点 P を $\mathrm{P}(a)$ と表すことにします。



数直線上で，点 O と点 $\mathrm{P}(a)$ の距離を a の絶対値といい， $|a|$ で表します。
すなわち，2 点 O, P 間の距離 OP は

$\mathrm{OP}=|a|$

で表されます。



また，数直線上の 2 点 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 間の距離 AB は

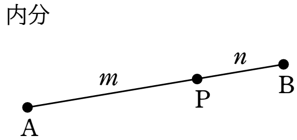
$a \leqq b$ のとき， $\mathrm{AB}=b-a$

$a>b$ のとき， $\mathrm{AB}=a-b=-(b-a)$

であるから

$\mathrm{AB}=|b-a|$

で表されます。

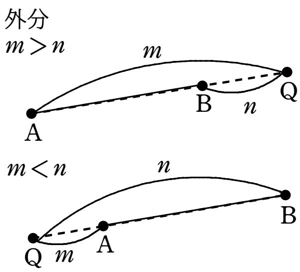


m, n は正の数とする。

点 P が線分 AB 上にあって

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m:n$ に**内分**するといい，P を**内分点**といいます。



点 Q が線分 AB の延長上にあって

$\mathrm{AQ}:\mathrm{PQ}=m:n$

が成り立つとき，点 Q は線分 AB を $m:n$ に**外分**するといい，Q を**外分点**といいます。
外分では， $m \neq n$ である。

数直線上の 2 点 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点 $\mathrm{P}(x)$ の座標を求めます。

(ⅰ) $a<b$ のとき

$a<x<b$ より

$\mathrm{AP}=x-a,\ \mathrm{PB}=b-x$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ より

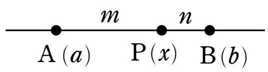
$(x-a):(b-x)=m:n$

$n(x-a)=m(b-x)$

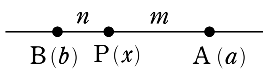
$(m+n)x=na+mb$

$\therefore\ x=\dfrac{na+mb}{m+n}$

$a<b$



$a>b$



(ⅱ) $a>b$ のとき

同様にして導かれます。

特に，$m=n$ のとき点 P は線分 AB の中点です。このとき，その座標は $\dfrac{a+b}{2}$ となります。

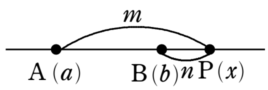
次に，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q (x) の座標を求めます。

(ⅰ) $m>n>0$ のとき

(ア) $a<b$ のとき

$a<b<x$ より

$\mathrm{AP}=x-a,\ \mathrm{PB}=x-b$



$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=m:n$ より

$(x-a):(x-b)=m:n$

$n(x-a)=m(x-b)$

$(m-n)x=-na+mb$

$\therefore\ x=\dfrac{-na+mb}{m-n}$

(イ) $a>b$ のときも同様

(ⅱ) $0<m<n$ のときも $a<b,\ a>b$ どちらの場合も同様に成り立ちます。

以上のことをまとめると，次のことが成り立ちます。

参考

外分点の公式は内分点の公式の n が $-n$ に置き換わったものなので，

P は AB を $m:n$ に外分は，P は AB を $m:(-n)$ に内分と考えて，内分点の公式を用いると考えるとよい。

線分の内分点，外分点

数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して

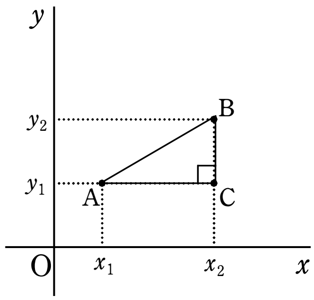
1. 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$

2. 線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は $\dfrac{-na+mb}{m-n}$

(2) **平面上の点**

座標平面上の 2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) 間の距離 AB を求めます。

直線 AB が x 軸，y 軸のどちらにも平行でないとき，右図において



$\mathrm{AC}=|x_2-x_1|,\ \mathrm{BC}=|y_2-y_1|$

△ABC は直角三角形であるから、三平方の定理より

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2}$$
$$=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

この式は，直線 AB が x 軸，または y 軸に平行なときにも成り立ちます。

以上のことをまとめると，次のようになります。

2 点間の距離

2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) 間の距離 AB は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

特に，原点 O と点 A(x_1, y_1) の距離 OA は

$$\mathrm{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$$

例1

座標平面上の点 A(2，5) と B(8，−3) の距離を求めよ。

解説

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(8-2)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

例2

(1) y 軸上の点 C は 2 点 A $(2, 1)$, B $(-3, 2)$ から等距離にあるという．このとき，点 C の座標を求めよ．

(2) 座標平面上で，原点 $(0,\ 0)$，点 $(2,\ 1)$，点 $(a,\ b)$ が正三角形の頂点となっているとする。このとき，$(a,\ b)=\boxed{}$ である。ただし，点 $(a,\ b)$ は第 1 象限にあるものとする。

解説

(1) 点 C は y 軸上にあるから，$C(0, c)$ とおける

$AC=BC$ から $AC^2=BC^2$ より

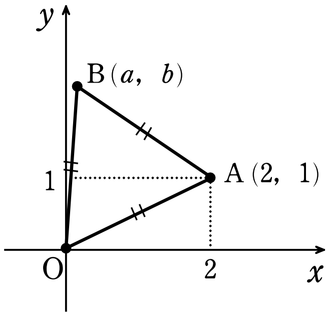
$$(2-0)^2+(1-c)^2=(-3-0)^2+(2-c)^2$$

$$5-2c+c^2=13-4c+c^2$$

$$2c=8 \quad \therefore\ c=4$$

よって，点 C の座標は $(0, 4)$

(2) O $(0,\ 0)$, A $(2,\ 1)$, B $(a,\ b)$ とする



$OA=OB=AB$ から $OA^2=OB^2=AB^2$ より

$$a^2+b^2=5 \cdots ①$$

$$(a-2)^2+(b-1)^2=5 \cdots ②$$

①，②より

$$4a+2b-5=0$$

$$b=-2a+\frac{5}{2} \cdots ③$$

①，③より

$$a^2+\left(-2a+\frac{5}{2}\right)^2=5$$

$$4a^2-8a+1=0 \quad \therefore\ a=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$$

$a=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ のとき，$b=\dfrac{1\mp2\sqrt{3}}{2}$ (複号同順)

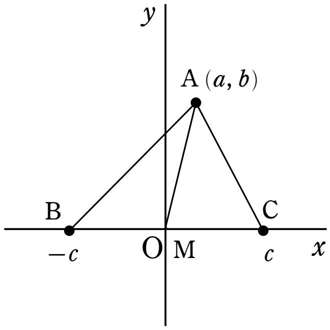
$a>0$，$b>0$ より

$$(a,\ b)=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$$

例3
三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とする。このとき，次の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

(解説)

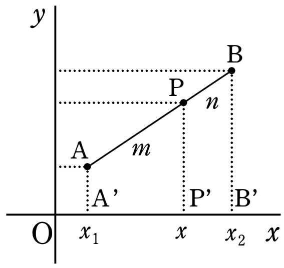


直線 BC を x 軸，点 M を原点にとり，
△ABC の頂点の座標を A$(a,\ b)$, B$(-c,\ 0)$,
C$(2c,\ 0)$，ただし $b\fallingdotseq 0$，$c>0$ とする

$$\begin{aligned}&AB^2+AC^2\\&=\{(-c-a)^2+b^2\}+\{(c-a)^2+b^2\}\\&=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(c^2-2ac+a^2+b^2)\\&=2(a^2+b^2+c^2)=2(AM^2+BM^2)\end{aligned}$$

参考 この定理を**中線定理**(**パップスの定理**)といいます。

座標平面上の 2 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P(x, y) の座標を求めます。



直線 AB が x 軸に垂直でないとき，
A, B, P から x 軸にそれぞれ垂線 AA’,
BB’, PP’ を下ろすと，点 P’は線分A’B’
を $m:n$ に内分します。
よって，数直線上の内分点の公式より

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

直線 AB が x 軸に垂直であるときも $x=x_1=x_2$ より成り立ちます。
y 座標についても同様にして

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

また，外分点の座標についても同様にして求められます。
よって，次のことが成り立ちます。

内分点，外分点の座標

2 点 A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) に対して，

1. 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

特に，線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

2. 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

例4

(1) 2 点 A (−1，4)，B (2，1) 間の距離を求めよ．また，線分 AB を 2：1 の比に内分する点の座標と外分する点の座標を求めよ．

(2) 座標平面上の三角形 ABC において，辺 AB の中点の座標が (1, −2) であり，重心の座標が (0, 1) であるとき，点 C の座標は

(ア$\boxed{}$, イ$\boxed{}$) である．

解説

(1) $\mathrm{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

内分点の座標は

$$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot2}{2+1},\ \frac{1\cdot4+2\cdot1}{2+1}\right)=(1,\ 2)$$

外分点の座標は

$$\left(\frac{(-1)\cdot(-1)+2\cdot2}{2-1},\ \frac{(-1)\cdot4+2\cdot1}{2-1}\right)=(5,\ -2)$$

(2) 辺 AB の中点を M，△ABC の重心を G とおくと

C (a, b) とすると，G はCMを 2：1 の比に内分するから

$$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot1}{2+1}, \frac{1\cdot b+2\cdot(-2)}{2+1}\right)=(0, 1) \qquad \therefore\ a=-2, b=7$$

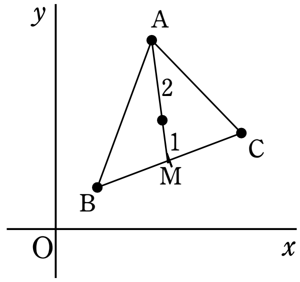
よって，C $(-2, 7)$

別解

C は線分 MG を 3：2 の比に外分する点より

$$\left(\frac{-2\cdot1+3\cdot0}{3-2}, \frac{-2(-2)+3\cdot1}{3-2}\right)=({}^{ア}-2, {}^{イ}7)$$

3 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) を頂点とする△ABC の重心 G(x, y) を求めます。



辺 BC の中点 M の座標は

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

G は中線 AM を 2 : 1 に内分する点であるから

$$x=\frac{1\cdot x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

同様にして，$y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$

よって，重心 G の座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

三角形の重心の座標

3 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) を頂点とする△ABC の重心 G の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

例5

(1) 3 点 A$(4,\ 5)$，B$(-4,\ -2)$，C$(2,\ -5)$ に対して，線分 AB を 2：1 に内分する点の座標は ア$\boxed{}$ であり，三角形 ABC の重心の座標は イ$\boxed{}$ である。

(2) 2 点 A$(1, 1)$, B$(2, 5)$ を 2 つの頂点とし，点 $(3, 2)$ を重心とする三角形 ABC の頂点 C の座標を求めよ.

解説

(1) 線分 AB を 2：1 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{1\cdot4+2\cdot(-4)}{2+1},\ \frac{1\cdot5+2\cdot(-2)}{2+1}\right)={}^{ア}\left(-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

三角形 ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{4+(-4)+2}{3},\ \frac{5+(-2)+(-5)}{3}\right)={}^{イ}\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$$

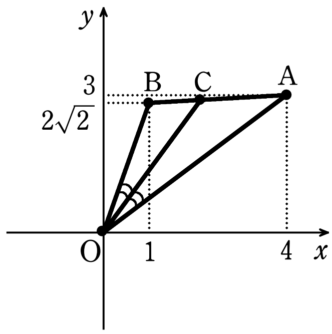
(2) C(a, b) とすると

$$\frac{1+2+a}{3}=3,\ \frac{1+5+b}{3}=2 \qquad \therefore\ a=6,\ b=0$$

よって， C$(6, 0)$

例6 座標平面上において，3 点 O$(0,\ 0)$， A$(4,\ 3)$， B$(1,\ 2\sqrt{2})$ が与えられている． ∠AOB の 2 等分線が線分 AB と交わる点を C とするとき，C の座標を求めよ．

(解説)



OC は ∠AOB の 2 等分線であるから

角の 2 等分線の定理より

　AC：BC＝OA：OB

$\mathrm{OA}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$\mathrm{OB}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{9}=3$ より

　AC：BC＝5：3

よって，点 C の座標は

$$\mathrm{C}\left(\frac{3\cdot4+5\cdot1}{5+3},\ \frac{3\cdot3+5\cdot2\sqrt{2}}{5+3}\right)=\left(\frac{17}{8},\ \frac{9+10\sqrt{2}}{8}\right)$$

(3) **点に関して対称な点**

　点 A(a, b) に関して，2 点 P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) が対称であるとき，A は線分PQ の中点である。

例7 平行四辺形 ABCD の 3 頂点が A$(5, 1)$, B$(-1, 5)$, C$(7, 3)$ であるとき，対角線 AC の中点の座標と点 D の座標を求めよ．

(解説)

対角線 AC の中点の座標は

$$\left(\frac{5+7}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)=(6,\ 2)$$

D の座標を $(a,\ b)$ とすると，

平行四辺形 ABCD の 2 つの対角線 AC, BD の中点が一致するから

$$6=\frac{x-1}{2},\ 2=\frac{y+5}{2} \qquad \therefore\ \mathrm{D}(13,\ -1)$$

別解

DはAからB→Cの移動分だけ移動したものであるから

$(5+8, 1-2)=(13, -1)$

例8

三角形ABCにおいて，辺ABの中点が$(1, 2)$，辺BCの中点が$(-1, 2)$，辺CAの中点が$(3, 1)$であるとき，頂点Aの座標を求めよ．

解説

$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$とおく

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=1$ より，　$x_1+x_2=2$ …①

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=2$ より，　$y_1+y_2=4$ …②

$\dfrac{x_2+x_3}{2}=-1$ より，　$x_2+x_3=-2$ …③

$\dfrac{y_2+y_3}{2}=2$ より，　$y_2+y_3=4$ …④

$\dfrac{x_3+x_1}{2}=3$ より，　$x_3+x_1=6$ …⑤

$\dfrac{y_3+y_1}{2}=1$ より，　$y_3+y_1=2$ …⑥

①，③，⑤より

$x_1=5$，$x_2=-3$，$x_3=1$

②，④，⑥より

$y_1=1$，$y_2=3$，$y_3=1$

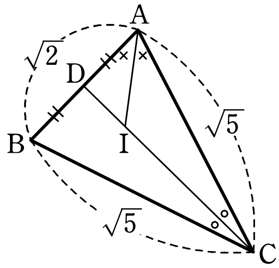
よって，　$A(5, 1)$

別解

例7の移動の方法でもできます。

確認問題1
平面上に 3 点 A(2, 3), B(1, 2), C(3, 1) をとる。このとき，三角形 ABC の内心を求めよ。

(解説)



$AB=\sqrt{2}$，$BC=CA=\sqrt{5}$

△ABC の内心を I とする

直線 CI と線分 AB の交点を D とすると

点 D は線分 AB の中点より，点 D の座標は

$$\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

$AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり，角の二等分線の定理から

点 I は線分 DC を $\dfrac{\sqrt{2}}{2}:\sqrt{5}$ に内分する点より

点 I の x 座標は

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{8+\sqrt{10}}{6}$$

点 I の y 座標は

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(5\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{48-3\sqrt{10}}{18}=\frac{16-\sqrt{10}}{6}$$

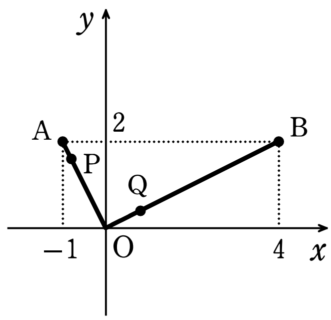
よって，求める内心の座標は

$$\left(\frac{8+\sqrt{10}}{6},\ \frac{16-\sqrt{10}}{6}\right)$$

確認問題2

O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(4,\ 2)$ をとる。実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，線分 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P，線分 OB を $(1-t):t$ に内分する点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さの最小値，およびそのときの t の値を求めよ。

解説



点 P は線分 OA を $t:(1-t)$ に内分する点より

$$\left(\frac{(1-t)\cdot 0+t\cdot(-1)}{t+(1-t)},\ \frac{(1-t)\cdot 0+t\cdot 2}{t+(1-t)}\right)$$

$\therefore\ (-t,\ 2t)$

点 Q は線分 OB を $(1-t):t$ に内分する点より

$$\left(\frac{t\cdot 0+(1-t)\cdot 4}{(1-t)+t},\ \frac{t\cdot 0+(1-t)\cdot 2}{(1-t)+t}\right)$$

$\therefore\ (4-4t,\ 2-2t)$

よって

$$\begin{aligned}PQ^2&=\{(4-4t)-(-t)\}^2+\{(2-2t)-2t\}^2\\&=(4-3t)^2+(2-4t)^2\\&=25t^2-40t+20\\&=25\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+4\end{aligned}$$

$0<t<1$ より，$t=\dfrac{4}{5}$ で最小

$PQ>0$ より，PQ の最小値は $\sqrt{4}=2$

確認問題3

平面上の 4 点 $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(5,\ 1)$, $(a,\ b)$ を頂点とする四角形が平行四辺形となるような座標 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

解説

A$(0,\ 1)$, B$(2,\ 3)$, C$(5,\ 1)$, P$(a,\ b)$ とする

平行四辺形は ABCP , ABPC , APBC の 3 つの場合がある

平行四辺形 ABCP のとき

線分 AC と線分 BP の中点が一致するから

$$\left(\frac{0+5}{2},\ \frac{1+1}{2}\right)=\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right) \quad \therefore (a,\ b)=(3,\ -1)$$

平行四辺形 ABPC のとき

線分 AP と線分 BC の中点が一致するから

$$\left(\frac{0+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)=\left(\frac{2+5}{2},\ \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore (a,\ b)=(7,\ 3)$$

平行四辺形 APBC のとき

線分 AB と線分 PC の中点が一致するから

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)=\left(\frac{5+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right) \quad \therefore (a,\ b)=(-3,\ 3)$$

別解

移動の方法で解いてもよい。