

1[2012 西南学院大] △ABC について、2 つの命題 P, Q を考える。 $P: AC > AB$ ならば $\angle B > \angle C$ $Q: \angle B > \angle C$ ならば $AC > AB$ 次の問いに答えよ。ただし、二等辺三角形の 2 つの底角が等しいことは前提としてよい。 (1) 命題 P を証明せよ。 ヒント：辺 AC 上に $AB = AD$ となる点 D をとって考えよ。 (2) 命題 Q を、背理法を用いて証明せよ。ただし、証明に際して、(1) で証明した命題 P を用いてよい。	3[1997 岐阜聖徳学園大] AB=2, BC=x, AC=$4-x$ であるような三角形 ABC がある。 (1) x の値の範囲を求めよ。 (2) 三角形 ABC が鋭角三角形であるような x の値の範囲を求めよ。
	4[2006 南山大] 三角形 ABC があり、辺 AB の長さは 3.6, 辺 AC の長さは 0.5 である。辺 BC の長さが整数であるとき、その長さを求めよ。 5[2008 兵庫医科大] $a = 2x - 3$, $b = x^2 - 2x$, $c = x^2 - x + 1$ が、三角形の 3 辺であるとき、実数 x の値の範囲は である。 6[2008 福井工業大] △ABC において、$a = 4$, $b = 3\sqrt{2}$ のとき、△ABC が鋭角三角形となるような c の値の範囲を求めよ。

2[1998 滋賀大]

△ABC において、 $\angle A$ の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とし、線分 AD 上の任意の点を P とする。 $AB > AC$ ならば、 $PB > PC$ が成り立つことを証明せよ。

7 [2007 京都女子大]

四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

(1) 四角形 PQRS は平行四辺形であることを示せ。

(2) 四角形 PQRS が円に内接するならば、四角形 ABCD の 2 本の対角線は直交することを示せ。

(3) 四角形 PQRS が円に外接するならば、PQRS はひし形になることおよび四角形 ABCD の 2 本の対角線の長さは等しいことを示せ。

8 [2018 大分大]

AB=8, AC=5, $\angle BAC=60^\circ$ の $\triangle ABC$ がある。

(1) 点 P が $\triangle ABC$ の内心であるとき、 $\angle BPC$ の大きさを求めよ。

(2) 点 P が $\triangle ABC$ の外心であるとき、線分 BP の長さを求めよ。

(3) 点 P が $\triangle ABC$ の重心であるとき、 $\triangle PBC$ の面積を求めよ。

9 [2011 西南学院大]

(1) 点 R と線分 AB に関して、次の 2 つの条件 p と q は同値であることを証明せよ。

p : 点 R は線分 AB の垂直二等分線上にある。

q : $RA=RB$

(2) (1) の結果を用いて、三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わることを証明せよ。

(3) 三角形 ABC において重心と外心が同じ点であるとき、三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。(ただし、三角形の重心とは、三角形の 3 つの中線の交点のことである。)

10 [2007 同志社女子大]

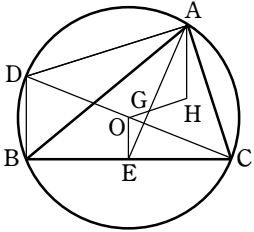
三角形 ABC において、 $AB=AC=3$, $BC=2$ である。三角形 ABC の重心を G, 内心を I とするとき、GI の長さを求めよ。

11 [1999 宮崎大]

右図において、 $\triangle ABC$ の外心を O, 垂心を H とする。また、 $\triangle ABC$ の外接円と直線 CO の交点を D, 点 O から辺 BC に引いた垂線を OE とし、線分 AE と線分 OH の交点を G とする。

(1) $AH=DB$ であることを示せ。

(2) 点 G は $\triangle ABC$ の重心であることを示せ。



12[2015 佛教大] AB=6, BC=12, CA=9である△ABCがある。△ABCの内心をIとし、直線AIと辺BCの交点をDとすると、AI:ID=^ア<input ""="" :="" type="text"/>:^イ<input ""="" :="" type="text"/>である。	16[2000 同志社大] 直角三角形ABC(∠A=90°)の斜辺BC上に点Pをとる。△ABPの面積が△ABCの面積の$\frac{1}{3}$であるとき、∠BAPの大きさを求めよ。ただし、AB=1, AC=2とする。
13[2012 佛教大] 右の図の三角形ABCにおいて、AB=12, BC=6, CA=9である。また、ADは∠Aの二等分線、AEは∠Aの外角の二等分線である。このとき、DEの長さを求めよ。	17[2008 京都大] AB=ACである二等辺三角形ABCを考える。辺ABの中点をMとし、辺ABを延長した直線上に点Nを、AN:NB=2:1となるようにとる。このとき、∠BCM=∠BCNとなることを示せ。ただし、点Nは辺AB上にはないものとする。 18[2002 鹿児島大] (1) △PQRの辺QR上の点Sが$\overline{PQ}:\overline{PR}=\overline{QS}:\overline{SR}$を満たすとき、$\angle QPS=\angle RPS$が成り立つことを証明せよ。ただし、$\overline{PQ}$は線分PQの長さを表すものとし、他も同様とする。 (2) $AD\parallel BC$, $\overline{AD}<\overline{BC}$を満たす台形ABCDがある。辺BC上の点Fは$\overline{BA}:\overline{BD}=\overline{BF}:\overline{BC}$, $AF\parallel DC$を満たしているとする。このとき、AFとBDの交点をGとすると、△BAGは二等辺三角形であることを証明せよ。 (3) (2)の条件のもとで、辺AD上の点Eは$\overline{BA}:\overline{BD}=\overline{AE}:\overline{ED}$を満たしているとする。このとき、BEとAFは直交することを証明せよ。 19[2004 宮崎大] AB>ACである△ABCについて、次の各問いに答えよ。なお、下の2つの図において、点Xは辺BAの延長上の点とする。 (1) 右図のように、点Mを辺BCの延長上に$AB:AC=BM:MC$を満たすようにとる。このとき、次の(ア), (イ)に答えよ。 (ア) 点Nを辺AB上に$AC=AN$を満たすようにとるとき、$MA\parallel CN$であることを示せ。 (イ) AMが∠Aの外角を2等分することを示せ。 (2) 右図において、点Qは∠Bの2等分線と辺ACとの交点、点Rは∠Cの2等分線と辺ABとの交点とする。また、直線RQと辺BCの延長との交点をPとする。このとき、APが∠Aの外角を2等分することを示せ。
14[2015 明治大] △ABCの面積は72であり、辺AB, BC, CAの比が7:6:5である。△ABCの内心をI、直線AIと辺BCの交点をDとすると、△CADの面積は^ア<input ""="" :="" type="text"/>, △IABの面積は^イ<input ""="" :="" type="text"/>である。	
15[2021 摂南大] AB=12, BC=7, CA=9である△ABCにおいて、辺BC上に点DをBD=4を満たすようにとり、点Aを通り、線分ADに垂直な直線と辺BCの延長との交点をEとする。このとき、BE=^ア<input ""="" :="" type="text"/>であり、△ACDの面積は△ACEの面積の$\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$倍である。	

20 [1997 広島修道大]

- (1) $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の 2 等分線と $\angle B, \angle C$ の外角の 2 等分線は 1 点で交わることを証明せよ。
- (2) $\triangle ABC$ の 3 つの傍心を頂点とする三角形は、点 A, B, C を辺上にもつことを証明せよ。

22 [2019 立教大]

面積が 1 である三角形 ABC の辺 AB を $1:1$ に内分する点を D 、辺 BC を $1:2$ に内分する点を E 、直線 AE と直線 CD の交点を F 、直線 BF と直線 AC の交点を G とする。このとき、三角形 CFG の面積は である。

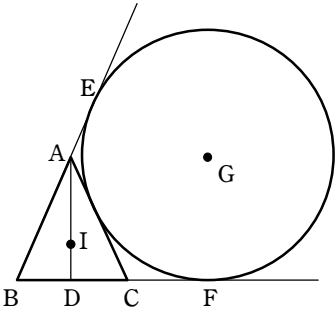
23 [1999 東北学院大]

$\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があり、 AP, BQ, CR が 1 点で交わっているとする。 QR と BC が平行でないとき、直線 QR と直線 BC の交点を S とすると、 $BP:BS=CP:CS$ が成り立つことを示せ。

21 [2010 岐阜聖徳学園大]

$AB=AC$ である二等辺三角形 ABC の内接円の中心を I とし、内接円と辺 BC の接点を D とする。辺 BA の延長と点 E で、辺 BC の延長と点 F で接し、辺 AC と接する $\angle B$ 内の円の中心を G とする。

- (1) $AD=GF$ となることを証明せよ。
- (2) $AB=7, BD=3$ のとき、 IG の長さを求めよ。



24 [2018 明治薬科大]

三角形 OAB において、辺 OA を $1:2$ に内分する点を C 、辺 OB を $3:4$ に内分する点を D とし、線分 AD と BC の交点を P 、直線 OP と辺 AB との交点を Q とする。

このとき $\frac{AP}{PD} = \frac{7}{\text{ }} \text{ }$ であり、 $\frac{OP}{PQ} = \frac{1}{\text{ }} \text{ }$ である。

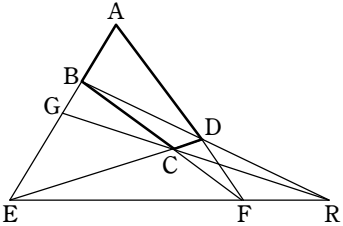
25 [1998 九州大]

右図のような四角形 $ABCD$ において、直線 AB と直線 CD の交点 E 、直線 BC と直線 AD の交点 F 、直線 BD と直線 EF の交点 R 、直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする。

- (1) $\frac{BG}{GE} = \frac{BA}{AE}$ が成り立つことを示せ。
- (2) G が線分 AE の中点で、 $\frac{AD}{DF} = 2$ であると

き、 $AB=a, CD=b$ とおく。次の条件を満たす x, y, z の値を求めよ。

- (a) $EB=xa$
- (b) $EC=yb$
- (c) 四角形 $ABCD$ が円に内接するとき、 $a=zb$



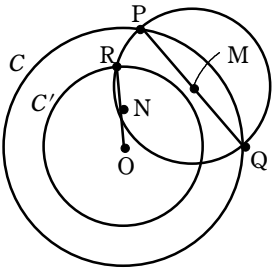
26[佐賀大] 次の定理を証明せよ。 「三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，各中線はその交点でそれぞれ 2 : 1 に内分される。」 27[青山学院大] △ABC において，AB の中点を P，AC を 3 : 2 に内分する点を Q，BC を 3 : 2 に外分する点を R とするとき，3 点 P, Q, R が一直線上にあることを証明せよ.	29[2008 武蔵工業大] △ABC の各辺の長さが AB=4，BC=7，CA=8 であるとする。辺 CA の中点を M とするとき，BM の長さを求めよ。 30[1990 明治大] 三角形 ABC の辺 BC 上の点 D で，AD²+BD² を最小にする点を求めよ。
--	---

28[津田塾大]

三角形 ABC の辺 AB を 5 : 2 に内分する点を D とし，辺 AC を 5 : 3 に内分する点を E とする．このとき，線分 DE は三角形 ABC の重心を通ることを示せ．

31[2009 関西大]

図のように，O を中心とする半径 6 の円 C と半径 4 の円 C' がある。円 C 上に 2 点 P，Q をとり，P，Q を直径の両端とする円を描くと円 C' と点 R で交わった。このとき，線分 PQ の中点を M，線分 OR の中点を N とすると，MN の長さは である。



[32][2007 大阪府立大]

円に内接する四角形 ABCD の対角線 AC, BD が直交するとき, その交点 E を通って辺 AB に垂直な直線は対辺 CD の中点を通ることを示せ。

[34][2015 西南学院大]

鋭角三角形 ABC において, A から辺 BC に下ろした垂線の足を D, C から辺 AB に下ろした垂線の足を E とする。AD と CE の交点を F とし, BF の延長と辺 AC の交点を G とする。

(1) 四角形 BDFE は円に内接することを証明せよ。

(2) 四角形 AEDC は円に内接することを証明せよ。

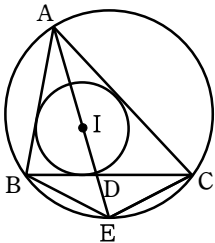
(3) 三角形 ABG と三角形 ACE は相似であることを証明せよ。

(4) 四角形 AEFG は円に内接することを証明せよ。

[33][2017 摂南大]

△ABC の内心 I と点 A を結ぶ直線と辺 BC の交点を D, △ABC の外接円との交点を E とする。BE の長さが $\frac{1}{2}$

の場合に, EI の長さは $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。



[35][岡山大]

AB<AC である△ABC において, ∠A の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D, △ABC の外接円と交わる点を E とし, 辺 AC 上に点 F を AF=AB であるようにとれば, 4 点 C, D, E, F は同一円周上にあることを証明せよ。

[36][2016 東北大]

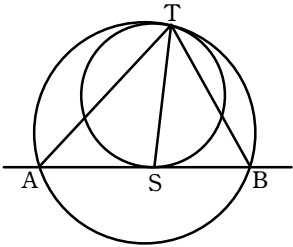
鋭角三角形 △ABC において, 頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。

(1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2) ∠ADE=∠ADF であることを示せ。

37[2010 神戸学院大]

図のように、大きい円に小さい円が点 T で内接している。点 S で小さい円に接する接線と大きい円との交点を A, B とするとき、 $\angle ATS$ と $\angle BTS$ が等しいことを証明せよ。



39[2013 鹿児島大]

四角形 ABCD において、線分 AC と線分 BD の交点を P とし、 $\angle DAC = \angle CBD$ 、 $AC = 8$ 、 $AP = 2$ 、 $PD = 4$ とする。このとき BD の長さを求めよ。

40[2007 法政大]

四角形 ABCD が辺 AB を直径とする円に内接している。 $AB = 10$ 、 $BC = 6$ であり、2つの線分 AC, BD の交点を E とおく。 $AE : EC = 3 : 1$ のとき、 $\frac{BE}{DE} = \text{ア}$ である。また、 $\triangle ABE$ の面積は イ 、 $\triangle CDE$ の面積は ウ である。

38[2006 倉敷芸術科学大]

四辺形 ABCD において、AC と BD の交点を P とする。 $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$ 、 $AB \parallel DC$ であるとする。このとき、 $\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ のそれぞれの外接円は互いに外接することを示せ。

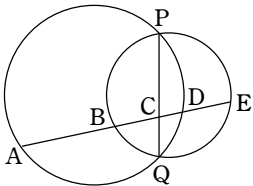
41[1997 広島修道大]

三角形 ABC の各頂点から対辺またはその延長に引いた垂線をそれぞれ AD, BE, CF とし、それらの交点(垂心)を H とするとき、 $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$ が成立することを証明せよ。

42[2014 佛教大]

右図のように2つの円の交点を P, Q とする。また、円と線分 PQ に交わる直線を図のように引き、交点を A, B, C, D, E とする。 $AB = 6$ 、 $BC = 4$ 、 $CD = 3$

であるとき、 $DE = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。



43[2001 大阪歯科大]

大小2つの円に関して、次のことを証明せよ。

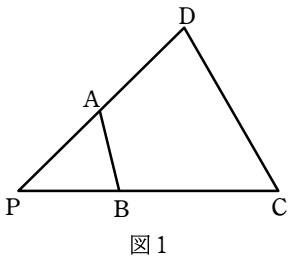
- ⑴ 2つの円が交わっているとき、2つの円の共通接線の2つの接点をA、Bとする。
このとき、2つの円の共通弦の延長線は、線分ABを2等分する。
- ⑵ 2つの円が外接しているとき、その接点を通る接線上の外の点から、2つの円に交
わる直線を2本引く。このとき、4つの交点は、同一円周上にある。

46[2009 宮崎大]

- ⑴ 図1のように、直線ADとBCは点Pで交わっている。

$PA \cdot PD = PB \cdot PC$

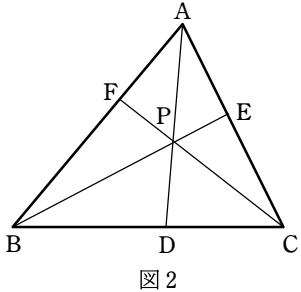
が成り立つとき、四角形ABCDは円に内接することを示せ。



- ⑵ 図2のように、鋭角三角形ABCの内部に点Pをとり、直線AP、BP、CPと、辺BC、CA、ABとの交点をそれぞれD、E、Fとする。

次の(A)、(B)がともに成り立つとき、点Pは△ABCの垂心であることを示せ。

- (A) 四角形AFPEは円に内接する。
- (B) 四角形CEPDは円に内接する。



三角形の各頂点から対辺に下ろした3本の垂線は1点で交わる。この点を三角形の垂心という。

44[2019 大分大]

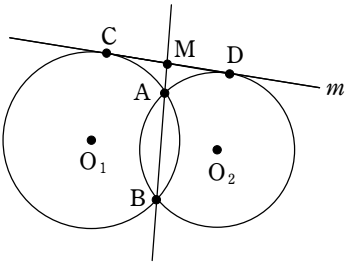
△ABCにおいて、点Aから辺BCに垂線AHを下ろす。線分AHを直径とする円Oと辺AB、ACの交点をそれぞれD、Eとし、円Oの半径を1、BH=1、CE=3とする。

- ⑴ 線分DBの長さを求めよ。
- ⑵ 線分HCと線分CAの長さをそれぞれ求めよ。
- ⑶ ∠EDHの大きさを求めよ。

45[2008 岩手大]

図のように、中心がO₁、O₂である2つの円が2点A、Bで交わっている。直線mを2つの円の共通接線、接点をC、Dとし、直線ABと直線mの交点をMとする。

- ⑴ 点Mは線分CDの中点であることを示せ。
- ⑵ ∠CMAが直角であるとき、2つの円の半径は等しいことを示せ。



47[1997 鹿児島大]

定点Oを中心とする半径rの円Cと、円Cの外に定点Pがある。点Pを通る直線が円Cと2点A、Bで交わり、更に、A、Bにおける接線が点Qで交わっているものとする。点Qから直線OPに下ろした垂線の足をHとする。

- ⑴ 点Hは中心Oとは異なることを証明せよ。
- ⑵ 5点Q、A、H、O、Bは同一円周上にあることを証明せよ。
- ⑶ $PH \cdot PO = PO^2 - r^2$ が成り立つことを証明せよ。
- ⑷ 直線QH上の円Cの外にあるどの点から円Cに2本の接線を引いても、その接点R、Sを通る直線は必ず点Pを通ることを証明せよ。

48 [2007 北星学園大]

円に内接する四角形 ABCD において対角線 BD 上に $\angle BAE = \angle CAD$ となるように点 E をとる。また、 $\angle BAD = 96^\circ$ 、 $\angle ABD = 35^\circ$ とする。

(1) $\angle ACB$ の大きさを求めよ。

(2) $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ であることを示せ。

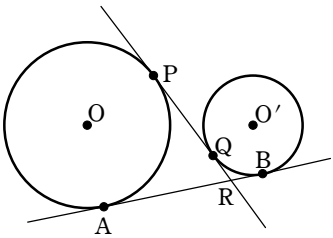
(3) $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ であることを示せ。

49 [1997 熊本大]

1 辺の長さが 1 の正五角形において、5 本の対角線を引いたときにできる小さな正五角形の 1 辺の長さを求めよ。

51 [2007 北里大]

右の図において、直線 AB は円 O、O' にそれぞれ点 A、B で接していて、直線 PQ は円 O、O' にそれぞれ点 P、Q で接している。直線 AB と直線 PQ の交点を R とする。円 O、O' の半径をそれぞれ r 、 r' とする。ただし、 $r > r'$ である。中心 O、O' 間の距離が 7 で、 $AB = 5$ 、 $PQ = 3$ であるとき、 r 、 r' の大きさは $r = \sqrt{\quad}$ 、 $r' = \sqrt{\quad}$ であり、線分 AR の長さは $AR = \sqrt{\quad}$ である。



50 [2006 新潟大]

四角形 ABCD は $\angle B = 120^\circ$ 、 $CD = DA = AC$ を満たしているものとする。

(1) $AB < BD$ であることを示せ。

(2) 線分 BD 上に $AB = BE$ となる点 E をとるとき、 $\angle BAE$ の大きさを求めよ。

(3) $AB + BC = BD$ であることを示せ。

52 [2011 関東学院大]

半径 7 の円と半径 3 の円の中心間の距離が 6 であった。このとき、共通接線の長さ、すなわち接点間の距離を求めよ。

53[2012 名城大] 四面体 $OABC$ において、$OA=OB=OC=1$ で、$AB=BC=CA=\sqrt{2}$ であるとき、この四面体の表面積、体積を求めよ。 54[2016 奈良女子大] 四面体 $ABCD$ において、$AB=3$、$AC=AD=5$、$BC=BD=4$、$CD=6$ であるとする。 (1) 三角形 BCD の面積を求めよ。 (2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。 (3) 辺 CD の中点を M、点 B から直線 AM へ下ろした垂線と直線 AM の交点を H とする。このとき、線分 BH の長さを求めよ。	56[2014 日本女子大] 四面体 $ABCD$ において、$AB=2$、$AC=BC=3$、$AD=BD=4$、$CD=5$ であるとする。M を辺 AB の中点とし、$\angle CMD=\theta$ とおく。 (1) $\cos\theta$ の値を求めよ。 (2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。 57[1998 名城大] すべての面が、2 辺の長さが 1、残りの辺の長さが a の二等辺三角形である四面体 $OABC$ がある。$AB=a$ とするとき (1) 辺 AB の中点を M とするとき、三角形 OMC の面積を a の式で表せ。 (2) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。 58[2015 関西学院大] 四面体 $OABC$ において、$OA=2\sqrt{5}$、$OB=OC=\sqrt{5}$、$BC=2\sqrt{3}$、$AB=AC$、$\angle AOC=120^\circ$ とし、BC の中点を D とする。このとき、$AC=\sqrt{\quad}$、$AD=\sqrt{\quad}$ である。また、$\cos\angle AOD=\sqrt{\quad}$ であり、$\triangle OAD$ の面積 S は $S=\sqrt{\quad}$ である。 頂点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線を OH とすると、$OH=\sqrt{\quad}$ である。
55[1997 藤田保健衛生大] 四面体 $ABCD$ において、$AB=4$、$AC=3$、$BC=5$、$BD=3$、$CD=\sqrt{14}$、$\angle CAD=90^\circ$ とする。このとき、$\cos\angle CBD=\sqrt{\quad}$ であるから、三角形 BCD の面積は $\sqrt{\quad}$ である。また、四面体 $ABCD$ の体積は $\sqrt{\quad}$ であるので、A から平面 BCD に下ろした垂線の長さは $\sqrt{\quad}$ である。	

59[2016 関西学院大] OA=OB=OC=4, AB=BC=CA=2である四面体OABCにおいて、辺OAの中点をMとする。このときMB=MC= であり、<math>\cos \angle BMC = \frac{1}{\text{ </math>であるから、$\triangle MBC$の面積は<math>\frac{\text{ </math>となる。また、点Oから$\triangle ABC$に下ろした垂線をOGとすると、OGの長さは<math>\frac{\text{ </math>となるから、四面体OABCの体積は<math>\frac{\text{ </math>となる。	61[2015 大阪経済大] (1) 正八面体の面の数は<math>\frac{\text{ </math>である。正八面体の1つの面の頂点の数は<math>\frac{1}{\text{ </math>、1つの頂点に集まる面の数は<math>\frac{\text{ </math>であるので、正八面体の頂点の数は<math>\frac{\text{ </math>である。また、正八面体の1つの面の辺の数は<math>\frac{\text{ </math>、1つの辺に集まる面の数は<math>\frac{\text{ </math>であるので、正八面体の辺の数は<math>\frac{\text{ </math>である。 (2) 凸多面体の頂点、辺、面の数を、それぞれv, e, fとすると<math>v-e+f=\frac{\text{ </math>が成り立つことが知られている。 (3) 12個の正五角形の面と20個の正六角形の面からなる凸多面体があり、どの頂点にも1個の正五角形と2個の正六角形の面が集まっている。この多面体の頂点の数は<math>\frac{\text{ </math>であり、辺の数は<math>\frac{\text{ </math>である。 (4) 各面が正三角形である正多面体が存在すれば、その面の数は<math>\frac{\text{ </math>か<math>\frac{\text{ </math>か<math>\frac{\text{ </math>である。各面が正方形である正多面体が存在すれば、その面の数は<math>\frac{\text{ </math>である。各面が正五角形である正多面体が存在すれば、その面の数は<math>\frac{\text{ </math>である。ただし、<math>\frac{\text{ </math>、<math>\frac{\text{ </math>、<math>\frac{\text{ </math>の解答の順序は問わない。
	62[2017 京都産業大] 正八面体の辺の本数は<math>\frac{\text{ </math>であり、頂点の個数は<math>\frac{1}{\text{ </math>である。 また、8枚の正六角形と6枚の正方形で囲まれた凸多面体の辺の本数は<math>\frac{\text{ </math>であり、頂点の個数は<math>\frac{\text{ </math>である。ただし、凸多面体とは、どの2つの頂点を結んだ線分もその多面体内に含まれる多面体をさす。 63[2022 大阪公立大] 次のような凸多面体K, K'について考える。KとK'のどちらについても、各面は正方形または正六角形である。また、Kについて、頂点の数vは24、辺の数eは36である。 (1) Kの面の数fを求めよ。 (2) K'の各頂点について、その頂点に集まる面の数が3であることを示せ。 (3) K'について、正方形である面の数が6であることを示せ。 (4) K'の面の数をf'とすると、$f \geq f'$であることを示せ。
60[2015 東京慈恵会医科大] 四面体ABCDにおいて、$AB=3, BC=\sqrt{13}, CA=4, DA=DB=DC=3$とし、頂点Dから$\triangle ABC$に垂線DHを下ろす。 このとき、DHの長さは<math>\frac{\text{ </math>、四面体ABCDの体積は<math>\frac{1}{\text{ </math>である。	

64[2015 奈良県立医科大]

正四面体(T)の1辺の長さと正八面体(O)の1辺の長さが等しいとき、Tの体積はOの体積の何倍か求めよ。

66[2010 岐阜薬科大]

1 辺の長さが 1 の正二十面体 W のすべての頂点が球 S の表面上にあるとき、次の問いに答えよ。なお、正二十面体は、すべての面が合同な正三角形であり、各頂点は 5 つの正三角形に共有されている。

(1) 正二十面体の頂点の総数を求めよ。

(2) 正二十面体 W の 1 つの頂点を A 、頂点 A からの距離が 1 である 5 つの頂点を B , C , D , E , F とする。 $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ を用いて、正五角形 $BCDEF$ の外接円の半径 R と対角線 BE の長さを求めよ。

(3) 2 つの頂点 D , E からの距離が 1 である 2 つの頂点のうち、頂点 A でない方を G とする。球 S の直径 BG の長さを求めよ。

(4) 球 S の中心を O とする。 $\triangle DEG$ を底面とする三角錐 $O DEG$ の体積を求めよ。

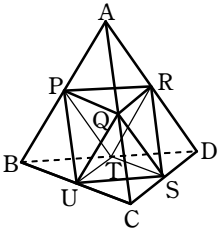
65[2013 茨城大]

右の図は、1 辺の長さが 8 である正四面体 $ABCD$ の各辺の中点を取り、それらをそれぞれ P , Q , R , S , T , U として正八面体 $PQRSTU$ を作ったものである。

(1) 2 点 Q , T を結ぶ線分の長さを求めよ。

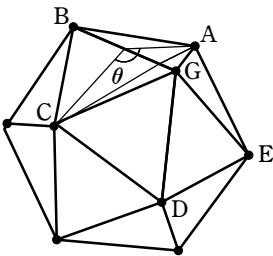
(2) 正八面体 $PQRSTU$ の体積を求めよ。

(3) 正八面体 $PQRSTU$ の各面の重心を取り、辺を共有している面の重心を線分で結ぶと、正八面体 $PQRSTU$ の内部に立方体を作ることができる。この立方体の体積を求めよ。



67[2016 芝浦工業大]

1 辺の長さが 1 の正三角形の高さは $\sqrt{\quad}$ である。また、正五角形 $ABCDE$ の 1 辺の長さを 1 とし、線分 AD と線分 CE の交点を F とするとき、2 つの二等辺三角形 ACD と CDF は相似だから、線分 AC の長さは $\sqrt{\quad}$ である。これより、 $\cos 36^\circ = \sqrt{\quad}$ である。更に、正二十面体は 20 個の合同な正三角形の辺どうしをつなぎ合わせて得られる、右のような正多面体であり、各頂点では、5 個の正三角形が集まっている。正二十面体の 1 辺の長さを 1、隣り合う 2 面のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta = \sqrt{\quad}$ である。これより、4 つの平面 ABG , BCG , ABC , ACG で囲まれた部分の体積は $\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$ である。



68[2004 上智大] 1 辺の長さが 1 の正四面体の高さは^ア で、体積は^イ である。この正四面体に内接する球の半径は^ウ であり、外接する球の半径は^エ である。	70[2014 早稲田大] 四面体 ABCD は、4 つの面のどれも 3 辺の長さが 7, 8, 9 の三角形である。この四面体 ABCD の体積は である。 71[2013 早稲田大] (1) 半径 1 の球が正四面体のすべての面に接しているとき、この正四面体の 1 辺の長さは である。 (2) 半径 1 の球が正四面体のすべての辺に接しているとき、この正四面体の 1 辺の長さは である。
69[1997 神戸女学院大] 1 辺の長さが a の正四面体 ABCD において (1) 隣り合う 2 つの面のなす角を θ とするときの $\cos \theta$ の値を求めよ。 (2) 四面体の体積 V を a を用いて表せ。 (3) 四面体に外接する球の半径 R を a を用いて表せ。 (4) 四面体に内接する球の半径 r を a を用いて表せ。	72[2007 早稲田大] 半径 r の球面上に異なる 4 点 A, B, C, D がある。 $AB=CD=\sqrt{2}, \quad AC=AD=BC=BD=\sqrt{5}$ であるとき、r を求めよ。

73[2017 大分大]

△ABCにおいてAB=5，AC=3とし∠Aの二等分線と辺BCとの交点をPとする。頂点Cから直線APに下ろした垂線と，直線AP，ABとの交点をそれぞれD，Eとする。

(1) 線分BEの長さを求めよ。

(2) 辺BCの中点をMとするとき，線分MDの長さを求めよ。

(3) AD：DPを求めよ。

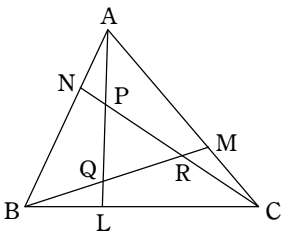
75[2019 名城大]

△ABCの辺BC上に点L，辺CA上に点M，辺AB上に点Nをとる。また，線分ALとCNの交点をP，線分ALとBMの交点をQ，線分BMとCNの交点をRとする。AN：NB=BL：LC=CM：MA=1：2であるとき

(1) AP：PLを求めよ。

(2) PQ：QLを求めよ。

(3) △PQRの面積をS₁，△ABCの面積をS₂とするとき，S₁：S₂を求めよ。



74[2015 北里大]

AB=3，BC=4，CA=2である三角形ABCにおいて，辺BC，CAの中点を，それぞれD，Eとし，ADとBEの交点をFとする。∠Cの二等分線が線分BEと交わる点をGとする。

(1) 三角形ABCの面積を求めよ。

(2) 三角形ABCの外接円の半径を求めよ。

(3) $\frac{FG}{BE}$ の値を求めよ。

76[2018 摂南大]

△ABCにおいて，辺BC，CA，ABを3：2に内分する点をそれぞれD，E，Fとする。線分ADとBE，ADとCFの交点をそれぞれG，Hとすると，

AG：GH：HD= $\frac{ア}{イ}$ $\square$ ： $\frac{ウ}{エ}$ $\square$ ： $\frac{オ}{カ}$ $\square$ である。

77[2002 愛知教育大]

四角形ABCDが円Oに外接している。辺AB，BC，CD，DAと円Oとの接点をそれぞれP，Q，R，Sとし，線分AP，BQ，CR，DSの長さをそれぞれa，b，c，dとおく。3直線AC，PQ，RSのどの2本も平行でないとき

(1) 2直線AC，PQの交点をXとすると，XがACを外分する比をa，b，c，dで表せ。

(2) 3直線AC，PQ，RSは1点で交わることを証明せよ。

[78][2007 京都大] △ABCにおいて、$\angle A$の二等分線とこの三角形の外接円との交点でAと異なる点をA'とする。同様に$\angle B$、$\angle C$の二等分線とこの外接円との交点をそれぞれB'、C'とする。このとき3直線AA'、BB'、CC'は1点Hで交わり、この点Hは三角形A'B'C'の垂心と一致することを証明せよ。	[81][2016 明治大] 鋭角三角形ABCで、$CA < AB < BC$を満たすものを考える。頂点Aから辺BCに下ろした垂線をAP、頂点Bから辺CAに下ろした垂線をBQ、頂点Cから辺ABに下ろした垂線をCRとする。このとき、線分AP、BQ、CRは1点で交わることが知られている。このようにして得られたAP、BQ、CRの交点をSとし、線分BS、CS、ASの中点をそれぞれD、E、Fとする。また、辺AB、BC、CAの中点をそれぞれJ、K、Lとする。 (1) 四角形JDELは長方形であることを示せ。 (2) 長方形JDELが内接する円Oの周上にQ、Rがあることを示せ。 (3) F、K、Pが(2)の円Oの周上にあることを示せ。
[79][2009 京都大] 平面上の鋭角三角形△ABCの内部(辺や頂点は含まない)に点Pをとり、A'をB、C、Pを通る円の中心、B'をC、A、Pを通る円の中心、C'をA、B、Pを通る円の中心とする。このときA、B、C、A'、B'、C'が同一円周上にあるための必要十分条件はPが△ABCの内心に一致することであることを示せ。 [80][2013 滋賀医科大] 平面上で2つの円S、S'が点Pで内接している。ただしS'がSより小さいとする。円S、S'の中心をそれぞれO、O'とおく。円S'上にあつて直線PO'上にはない点Qをとる。直線PQと円SとのPとは異なる交点をA、直線AOと円SとのAとは異なる交点をB、直線BO'と円SとのBとは異なる交点をC、直線CQと円SとのCとは異なる交点をDとする。 (1) $AO \parallel QO'$を示せ。 (2) $DB = BP$を示せ。	[82][2008 明治大] $\angle A$が鋭角である△ABCの頂点Aから対辺BCまたはその延長に下ろした垂線ADの延長と、△ABCの外接円との交点をEとする。更に△ABCの垂心をHとすると、$HD = DE$であることを証明せよ。

83[1998 鹿児島大]

正三角形 ABC の辺 BC 上に点 B, C と異なる任意の点 Q をとり、直線 AQ が正三角形 ABC の外接円と交わる点を P とする。

- (1) 三角形 BPQ と三角形 ACQ は相似であることなどに着目して、 $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) $AQ \cdot AP = AB^2$ が成り立つことを証明せよ。
- (3) $PB + PC = PA$ が成り立つことを証明せよ。

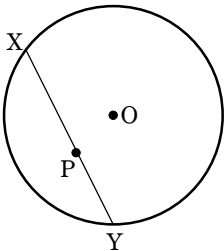
86[2007 同志社女子大]

鋭角三角形 ABC において、 $BC = 2\sqrt{7}$ である。頂点 B, C から辺 AC, AB に垂線を下ろし、その交点をそれぞれ D, E とすると、 $CD = 1$, $BE = 4$ である。

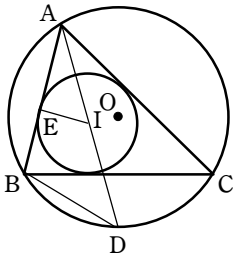
- (1) $BD = \text{ア}$, $CE = \text{イ}$ である。
- (2) BD と CE の交点を H とすると、 $CH = \text{ウ}$, $DH = \text{エ}$ である。
また、 $AB = \text{オ}$, $AC = \text{カ}$ である。
- (3) 直線 AH と辺 BC の交点を F とすると、 $BF : FC = \text{キ}$: であり、
 $AF = \text{ク}$ である。

84[2012 宮崎大]

- (1) 右図において、点 O を中心とする円の半径を R とする。
この円の弦 XY 上の任意の点を P とするとき、等式
$$OP^2 = R^2 - XP \cdot YP$$
 が成り立つことを示せ。



- (2) 右図の $\triangle ABC$ の外心を O, 内心を I とする。 $\triangle ABC$ の外接円, 内接円の半径をそれぞれ R, r とする。また、直線 AI と $\triangle ABC$ の外接円の、点 A と異なる交点を D, $\triangle ABC$ の内接円と辺 AB との接点を E とする。このとき、次の問いに答えよ。
(ア) $DB = DI$ であることを示せ。
(イ) $AI \cdot DI = 2Rr$ であることを示せ。
(ウ) $OI^2 = R^2 - 2Rr$ であることを示せ。



85[2011 旭川医科大]

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形とする。D を辺 BC 上の点とし、AD の延長線が $\triangle ABC$ の外接円と交わる点を P とする。

- (1) $AP = BP + CP$ であるとき、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。
- (2) $\frac{1}{BP} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{DP}$ であるとき、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。

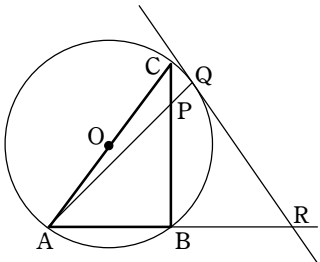
87[2009 愛知工業大]

長さ 3 の線分 AB を直径とする円周上に、2 点 C, D があり、線分 AC と線分 BD は円の内部の点 P で交わるとする。 $AD = 2$, $BC = 1$ のとき、AP, CD を求めよ。

88[2004 同志社女子大]

$AB = 6$, $BC = 8$, $CA = 10$ の直角三角形 ABC の外接円の中心を O とする。図のように、辺 BC 上に点 P をとり、線分 AP の延長と円 O との交点を Q とし、Q における円 O の接線と辺 AB の延長との交点を R とする。

- (1) $BR = 4$ のとき、 $QR = \text{ア}$ である。
- (2) $BP = 6$ のとき、 $BQ = \text{イ}$, $AQ = \text{ウ}$ であるから、 $QR = \text{エ}$ BR である。
- (3) $BP = 6$ のとき、(2) を用いると $BR = \text{オ}$ である。



89[2014 立命館大]

半径4, 9の2つの円 C_1 , C_2 が点 P で外接し, 点 P と異なる円 C_1 上の点 A と, 円 C_2 上の点 B で接する直線 ℓ がある。このとき, 線分 AB の長さは $\sqrt{\quad}$ である。
この2つの円に外接し, 直線 ℓ と線分 AB 上の点 R で接する円の半径を r とすると, $r = \sqrt{\quad}$ である。
次に, 直線 m は点 P で円 C_1 , 円 C_2 と接する直線とする。直線 ℓ と直線 m の交点を Q とするとき, 線分 PQ の長さは $\sqrt{\quad}$ である。

92[2011 武庫川女子大]

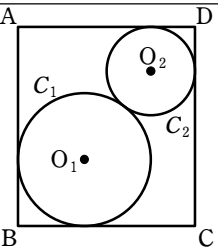
右の図のように, 長方形 ABCD の内部に, 互いに外接する2つの円 C_1 , C_2 がある。 C_1 は AB, BC, C_2 は CD, DA にそれぞれ接している。 C_1 , C_2 の中心をそれぞれ O_1 , O_2 , 半径をそれぞれ r_1 , r_2 とする。 O_1 を通り AB に平行な直線と, O_2 を通り BC に平行な直線の交点を E とする。
AB=9, $O_1O_2=5$ である。

(1) $O_1E = \sqrt{\quad}$, $AD = \sqrt{\quad}$

(2) r_1 , r_2 のとりうる範囲は, $\sqrt{\quad} \leq r_1 \leq \sqrt{\quad}$, $\sqrt{\quad} \leq r_2 \leq \sqrt{\quad}$ である。

(3) C_1 , C_2 の面積の和を S とする。 S を r_1 を使って表すと,
 $S = \pi \left\{ \sqrt{\quad} \left(r_1 - \sqrt{\quad} \right)^2 + \sqrt{\quad} \right\}$ となる。

(4) S は $r_1 = \sqrt{\quad}$, $r_2 = \sqrt{\quad}$ または $r_1 = \sqrt{\quad}$, $r_2 = \sqrt{\quad}$ のとき最大値 $\sqrt{\quad} \pi$, $r_1 = \sqrt{\quad}$, $r_2 = \sqrt{\quad}$ のとき最小値 $\sqrt{\quad} \pi$ をとる。



90[2021 お茶の水女子大]

共通の接線 ℓ をもつ円 C_1 , C_2 , C_3 の半径をそれぞれ r_1 , r_2 , r_3 とする。これらの円のどの2つも互いに外接しており, C_3 は ℓ , C_1 , C_2 に囲まれた領域に含まれているものとする。

(1) $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ となることを示せ。

(2) $r_3=1$ のとき, r_1+r_2 の取りうる値の最小値を求めよ。

91[2009 滋賀医科大]

半径をそれぞれ r , r_1 , r_2 とし中心をそれぞれ O , O_1 , O_2 とする異なる定円 O , O_1 , O_2 があって, 円 O_1 と O_2 は接しており, 円 O と O_1 , 円 O と O_2 はそれぞれ直交している。ただし2つの円が直交するとは, 共有点をもち, そこでの接線が直交することである。

(補足) 共有点をもつ2直線が直交するとは, 垂直なことである。

(1) 線分 OO_1 の長さを r , r_1 , r_2 のいくつかを使って表せ。

(2) 直線 O_1O_2 に点 O から下ろした垂線の足を H とするとき, 線分 O_1H の長さを r , r_1 , r_2 のいくつかを使って表せ。

(3) 円 O_1 と円 O_2 の接点は円 O 上にあることを証明せよ。

93[1997 東京理科大]

1 辺の長さが1の正方形の1つの対角線上に中心をもつ円を, この正方形内に重ならないように2つ描くことを考える。

(1) 2つの円の半径が異なるとき, 大きい方の円の最大半径はいくらか。

(2) 2つの同じ大きさの円を描くとき, その最大半径はいくらか。

(3) 円の面積の和が最大になるように2つの円を描いたとき, 2つの円の半径はそれぞれいくらか。また, そのときの2つの円の面積の和はいくらか。

94[2023 関西大]

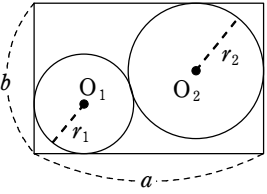
右図のように, 2 辺の長さが a と b である長方形に, 半径 r_1 の円 O_1 と半径 r_2 の円 O_2 が内接しているとす。ただし, $0 \leq b \leq a < 2b$ とする。

(1) $x=r_1+r_2$ とおくとき, 三平方の定理を用いて x が満たす2次方程式を a と b を用いて表せ。

(2) r_1+r_2 を a と b を用いて表せ。

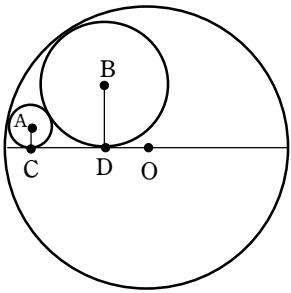
(3) 円 O_1 の面積と円 O_2 の面積の和を S とおいたとき, S を a , b と r_1 を用いて表せ。

(4) S の最小値を a と b を用いて表せ。



95[2009 慶応義塾大]

半径 1 の円 A と半径 3 の円 B は、右の図のように、互いに外接し、円 O に内接し、円 O の直径に C、D でそれぞれ接している。このとき、線分 CD の長さは $\sqrt{\quad}$ であり、円 O の半径は $\sqrt{\quad}$ である。



98[2010 群馬大]

三角錐 OABC において、 $AB=2\sqrt{3}$ ， $OA=OB=OC=AC=BC=\sqrt{7}$ とする。このとき、三角錐 OABC の体積を求めよ。

96[2015 香川大]

図 1 のように、 $AB=AC=5$ ， $BC=6$ の二等辺三角形 ABC 内に、半径が等しい 2 つの円 O_1 ， O_2 が次の 2 つの条件を満たすように置かれているとする。

- ・円 O_1 と円 O_2 は外接する。
- ・円 O_1 は辺 AB と辺 BC に接し、円 O_2 は辺 AC と辺 BC に接する。

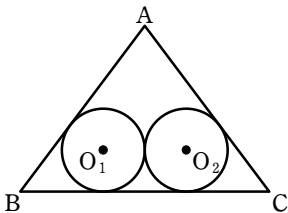


図 1

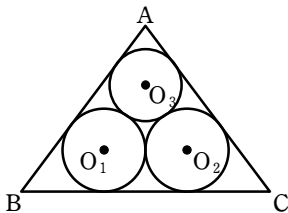


図 2

- (1) 辺 BC の中点を M としたとき、線分 AM の長さを求めよ。
- (2) 円 O_1 の半径 R を求めよ。
- (3) 更に円 O_3 が図 2 のように円 O_1 と円 O_2 に外接し、辺 AB と辺 AC に接しているとき、円 O_3 の半径 r を求めよ。

97[2004 名古屋大]

C_1 ， C_2 ， C_3 は、半径がそれぞれ a ， a ， $2a$ の円とする。いま、半径 1 の円 C にこれらが内接していて、 C_1 ， C_2 ， C_3 は互いに外接しているとき、 a の値を求めよ。

99 [2019 早稲田大] 半径 1 の球に外接する正四面体の高さは $\sqrt{\quad}$ である。 次に、半径 1 の 4 つの球について考える。それら 4 つの球は互いに接しており、各球の中心 O, P, Q, R を頂点とする立体 $OPQR$ が正四面体となるとき、この正四面体 $OPQR$ の高さは $\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$ である。また、この状態にある 4 つの球を収めることができる最小の正四面体の高さは $\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} \sqrt{\quad}$ である。	100 [2001 東京大] 半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 $ABCD$ の各辺の長さは、$AB = \sqrt{3}$、$AC = AD = BC = BD = CD = 2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。
---	---