

2.3 積分方程式

(1) 積分方程式

関数 $f(x)$ の方程式を関数方程式という。関数方程式の中で積分を含むものを積分方程式という。

積分方程式において、積分区間が $[a, b]$ のように定数であるものを定積分型、あるいは区間定数型といい、積分区間が $[a, x]$ のように変数を含むものを不定積分型という。ただし、区間に $2x, x^2$ などを含むこともあるので、区間変数型という方が一般的である。

既に学んだように、区間定数型では定積分は定数なので定数とおき、区間変数型では両辺を微分して $f(x)$ を求める。

例1

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1) f(x) = e^x - \int_0^1 f(t) dt$$

$$(2) f(x) = \cos x + \int_0^\pi \sin(x-t) f(t) dt$$

$$(3) f(x) = x^2 + \int_0^2 f'(t) e^t dt$$

$$(4) f'(x) = \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt, f(0) = 0$$

解説

$$(1) \int_0^1 f(t) dt = k \text{ (} k \text{ は定数) とおくと, } f(x) = e^x - k$$

このとき

$$k = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (e^t - k) dt = \left[e^t - kt \right]_0^1 = e - 1 - k$$

$$\therefore k = \frac{e-1}{2}$$

$$\text{よって, } f(x) = e^x - \frac{e-1}{2}$$

$$(2) f(x) = \cos x + \int_0^\pi (\sin x \cos t - \cos x \sin t) f(t) dt$$

$$= \cos x + \sin x \int_0^\pi f(t) \cos t dt - \cos x \int_0^\pi f(t) \sin t dt$$

$$\int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt = a, \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = b \quad (a, b \text{ は定数}) \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + a \sin x - b \cos x \\ &= a \sin x + (1-b) \cos x \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt &= \int_0^{\pi} \{a \sin t \cos t + (1-b) \cos^2 t\} \, dt \\ &= \int_0^{\pi} \left\{ \frac{a}{2} \sin 2t + (1-b) \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} \right\} \, dt \\ &= \left[-\frac{a}{4} \cos 2t + \frac{1-b}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{a}{4}(1-1) + \frac{1-b}{2} \pi = \frac{\pi}{2}(1-b) \quad \therefore a = \frac{\pi}{2}(1-b) \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt &= \int_0^{\pi} \{a \sin^2 t + (1-b) \sin t \cos t\} \, dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(a \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + \frac{1-b}{2} \sin 2t \right) \, dt \\ &= \left[\frac{a}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) - \frac{1-b}{4} \cos 2t \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{a}{2} \pi - \frac{1-b}{4}(1-1) = \frac{\pi}{2} a \quad \therefore b = \frac{\pi}{2} a \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より

$$a = \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}, \quad b = \frac{\pi^2}{\pi^2 + 4}$$

よって

$$f(x) = \frac{2\pi}{\pi^2 + 4} \sin x + \frac{4}{\pi^2 + 4} \cos x$$

☞ t で積分する場合, t 以外の文字は積分には関係ないので, 積分の外に出す。

$$(3) \int_0^2 f'(t) e^t \, dt = c \text{ とおくと, } f(x) = x^2 + c, \quad f'(x) = 2x$$

このとき

$$c = \int_0^2 2te^t \, dt = 2 \int_0^2 te^t \, dt = 2(e^2 + 1)$$

よって

$$f(x) = x^2 + 2(e^2 + 1)$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt = A$ (A は定数) とおくと

$$f'(x) = \cos x + A$$

$$f(x) = \sin x + Ax + C$$

$$f(0) = 0 \text{ より, } C = 0$$

$$\text{よって, } f(x) = \sin x + Ax$$

このとき

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + At) \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} At \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2} dt + \left[At \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \sin t dt$$

$$= \left[-\frac{\cos 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} A + \left[A \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} A - A \quad \therefore A = \frac{1}{4 - \pi}$$

よって

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{4 - \pi} x$$

例2

$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin(x-t) dt$, $g(x) = x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ.

(解説)

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) (\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt$$

$$= \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \cos t dt - \cos x \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin t dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \cos t dt = a, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin t dt = b \quad (a, b \text{ は定数}) \text{ とおくと}$$

$$f(x) = a \sin x - b \cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = c \text{ (定数) とおくと, } g(x) = x + c$$

このとき

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+c) \cos t dt = \left[(t+c) \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= \frac{\pi}{2} + c - \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + c - 1 \quad \therefore a = \frac{\pi}{2} + c - 1 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+c) \sin t dt = \left[-(t+c) \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \\ &= c + \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = c + 1 \quad \therefore b = c + 1 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin t - b \cos t) dt \\ &= \left[-a \cos t - b \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a - b \quad \therefore c = a - b \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } a = \pi - 3, \quad b = \frac{\pi}{2} - 1, \quad c = \frac{\pi}{2} - 2$$

よって

$$f(x) = (\pi - 3) \sin x - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos x, \quad g(x) = x + \frac{\pi}{2} - 2$$

$f(x)$ を連続な関数, a を定数とすると, 積分 $\int_a^x f(t) dt$ は x の関数で, 関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つである。すなわち, 次の公式が成り立つ。

$\int_a^x f(t) dt$ の導関数

$$a \text{ が定数のとき, } \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

注

$\int_a^x f(t)dt$ が関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つであることを知らなくても

$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると ($F'(x)=f(x)$),

$$\int_a^x f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^x = F(x) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x)dx = \{F(x) - F(a)\}' = F'(x) = f(x)$$

と導くことができる。

例3

(1) $f(x) = \int_0^x (1-t^2)e^t dt$ の極値を求めよ。

(2) すべての実数 x について $f(x) = \int_0^x (x-t)\cos t dt$ とするとき, $f(x)$ を求めよ。

解説

$$(1) f'(x) = (1-x^2)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } x = \pm 1$$

増減表は下図

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$$f(x) = \left[(1-t^2)e^t \right]_0^x + 2 \int_0^x te^t dt$$

$$= (1-x^2)e^x - 1 + 2 \left[te^t \right]_0^x - 2 \int_0^x e^t dt$$

$$= (-1 + 2x - x^2)e^x + 1 \text{ より}$$

$$\text{極小値は } f(-1) = 1 - \frac{4}{e}, \text{ 極大値は } f(1) = 1$$

$$(2) f(x) = \int_0^x (x-t)\cos t dt = x \int_0^x \cos t dt - \int_0^x t \cos t dt$$

$$f'(x) = \int_0^x \cos t dt + x \cos x - x \cos x$$

$$= \left[\sin t \right]_0^x = \sin x$$

よって, $f(x) = -\cos x + C$

条件から $f(0) = 0$ より, $x = 0$ を代入して

$$0 = -1 + C \quad \therefore C = 1$$

したがって, $f(x) = 1 - \cos x$

例4

(1) $F(x) = \int_x^{2x} e^t dt$ とするとき, $F(1)$ および $F'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$ に対して, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{}$ である。

(3) $f(x)$ は連続, $g(x)$ と $h(x)$ は微分可能な関数とすれば,

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = \boxed{}.$$

解説

(1) $F(x) = \int_x^{2x} e^t dt = \left[e^t \right]_x^{2x} = e^{2x} - e^x$ より

$$F(1) = e^2 - e$$

$$F'(x) = 2e^{2x} - e^x$$

(2) $F(x) = \int_0^x \sin \sqrt{t} dt$ とおくと, $F'(x) = \sin \sqrt{x}$

$$f(x) = \left[F(t) \right]_0^{x^2} = F(x^2) - F(0)$$

$$f'(x) = F'(x^2) \cdot (x^2)' = 2x F'(x^2) = 2x \sin \sqrt{x^2}$$

よって, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \sin \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \pi$

(3) $F'(t) = f(t)$ とすると

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} \left[F(t) \right]_{g(x)}^{h(x)}$$

$$= \frac{d}{dx} \{ F(h(x)) - F(g(x)) \}$$

$$= F'(h(x)) \cdot h'(x) - F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$$

例5

(1) $\int_0^{2x} f(t) dt = xe^{-x}$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 1 次関数 $f(x)$ が $\int_a^{3x+2} f(t) dt = x^2 + 3x$ を満たすとき, $f(x) =$

であり, $a =$ である。

(解説)

(1) 両辺を x で微分すると

$$2f(2x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$f(2x) = \frac{1}{2}(1-x)e^{-x}$$

x を $\frac{x}{2}$ におき換えて, $f(x) = \frac{1}{4}(2-x)e^{-\frac{x}{2}}$

$$(2) \int_a^{3x+2} f(t) dt = x^2 + 3x \cdots \textcircled{1}$$

両辺を x で微分すると

$$3f(3x+2) = 2x+3 \quad \therefore f(3x+2) = \frac{2}{3}x+1$$

$u=3x+2$ とおくと, $x = \frac{u-2}{3}$ より

$$f(u) = \frac{2}{3}\left(\frac{u-2}{3}\right) + 1 = \frac{2}{9}u + \frac{5}{9} \quad \therefore f(x) = \frac{2}{9}x + \frac{5}{9}$$

①に $3x+2=a$ となるような, $x = \frac{a-2}{3}$ を代入すると

$$\int_a^a f(t) dt = \left(\frac{a-2}{3}\right)^2 + a - 2$$

$$\frac{1}{9}(a-2)(a+7) = 0 \quad \therefore a = 2, -7$$

例6

(1) 関数 $f(x)$ は $x \geq 0$ において $\int_0^x f(t) dt = (x+1)f(x) - x$ を満たす。

$f(x)$ を求めよ。

(2) 連続な関数 $f(x)$ が $\int_a^x (x-t)f(t) dt = 2\sin x - x + b$ を満たすとき、

$f(x)$ と定数 a, b の値を求めよ。ただし、 a, b は定数であり、 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ である。

(3) 関数 $f(x)$ は微分可能で $f(x) = x^2 e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t) dt$ を満たすとき、 $f(x)$ を求めよ。

解説

(1) $\int_0^x f(t) dt = (x+1)f(x) - x$ …①の両辺を x で微分すると

$$f(x) = 1 \cdot f(x) + (x+1) \cdot f'(x) - 1 \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

両辺を x で積分すると

$$f(x) = \log|x+1| + C \quad \dots \textcircled{2} \quad (C \text{ は積分定数})$$

① の両辺に $x=0$ を代入すると、 $f(0)=0$ より …… ③

$x=0$ を代入して、 $C=0$

よって、 $f(x) = \log|x+1|$

$x \geq 0$ より、 $f(x) = \log(x+1)$

$$(2) x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt = 2\sin x - x + b$$

両辺を x で微分すると

$$\left\{ \int_a^x f(t) dt + x f(x) \right\} - x f(x) = 2\cos x - 1$$

$$\int_a^x f(t) dt = 2\cos x - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

両辺を x で微分すると、 $f(x) = -2\sin x$

①において、 $x=a$ とすると

$$0 = 2\cos a - 1 \quad \therefore \cos a = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq a \leq \frac{\pi}{2} \text{ より、 } a = \frac{\pi}{3}$$

$\int_a^x (x-t)f(t)dt = 2\sin x - x + b$ において, $x=a$ とすると

$$0 = 2\sin a - a + b$$

$$b = a - 2\sin a = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$(3) f(x) = x^2 e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt \cdots \textcircled{1}$$

両辺 x で微分して

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + f(x)$$

①より, $e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt = f(x) - x^2 e^{-x}$ であるから

$$f'(x) = 2xe^{-x}$$

$$f(x) = 2 \int xe^{-x} dx = 2 \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right)$$

$$= -2(x+1)e^{-x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

①から $f(0) = 0$ より, $x=0$ を代入して, $C=2$

よって, $f(x) = -2(x+1)e^{-x} + 2$

例7

2回微分可能な関数 $f(x)$ が, すべての実数 x について次の等式を満たしている。

$$f(x) = 2 + \int_0^x \sin(x-t)f(t) dt$$

このとき, $f''(x)$ が定数であることを示せ。

また, $f(0)$ および $f'(0)$ の値から, $f'(x)$ と $f(x)$ をそれぞれ求めよ。

解説

$$f(x) = 2 + \sin x \int_0^x \cos t f(t) dt - \cos x \int_0^x \sin t f(t) dt$$

$$f'(x) = \cos x \int_0^x \cos t f(t) dt + \cos x \sin x f(x) + \sin x \int_0^x \sin t f(t) dt - \cos x \sin x f(x)$$

$$= \cos x \int_0^x \cos t f(t) dt + \sin x \int_0^x \sin t f(t) dt$$

$$f''(x) = -\sin x \int_0^x \cos t f(t) dt + \cos^2 x f(x) + \cos x \int_0^x \sin t f(t) dt + \sin^2 x f(x)$$

$$= f(x) - \{f(x) - 2\} = 2$$

よって

$$f'(x) = 2x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

$f'(0) = 0$ であるから, $C_1 = 0$ より

$$f'(x) = 2x$$

さらに

$$f(x) = x^2 + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数})$$

$f(0) = 2$ であるから, $C_2 = 2$ より

$$f(x) = x^2 + 2$$

例8

微分可能な関数 $y = f(x)$ が方程式 $f(x) = 2 - 2 \int_0^x f(t) dt$ を満たすとき

- (1) $f'(x)$ を $f(x)$ で表せ。
- (2) $g(x) = e^{2x} f(x)$ とおくとき, $g'(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

解説

(1) $f(x) = 2 - 2 \int_0^x f(t) dt \cdots \textcircled{1}$ の両辺を x で微分して

$$f'(x) = -2f(x)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad g'(x) &= (e^{2x})' f(x) + e^{2x} \cdot f'(x) \\ &= 2e^{2x} \cdot f(x) + e^{2x} \cdot \{-2f(x)\} = 0 \end{aligned}$$

(3) $g'(x) = 0$ より, $g(x) = a$ (a は定数)

①から $f(0) = 2$ より, $g(0) = e^0 \cdot f(0) = 2$

よって, $g(x) = 2$

したがって, $2 = e^{2x} f(x)$ より, $f(x) = 2e^{-2x}$

注 例6, 7 では, 与えられた等式を微分すれば, $f(x), f'(x)$ のどちらかだけの式となるものを考えたが, 例8 では微分しても $f(x), f'(x)$ が混在するもの(微分方程式)について, その処理方法を考えている。この場合,

(1)から $\frac{f'(x)}{f(x)} = -2$ より, 両辺を積分して

$$\log|f(x)| = -2x + C$$

$$\therefore |f(x)| = e^{-2x+C} = e^C e^{-2x}$$

$$\therefore f(x) = C_0 e^{-2x} \quad (C_0 \text{ は定数})$$

であるから, e^{-2x} の逆数 e^{2x} をかけて定数にしたものが $g(x)$ である。

例9

a を正の定数とする. $x > 0$ で定義され, 常に正の値をとる関数 $f(x)$ で, 次の等式

$$\int_a^x (x+t)f(t)dt = x-a$$

を満たすものを求めよ. なお,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

である.

(解説)

$$x \int_a^x f(t)dt + \int_a^x t f(t)dt = x-a$$

両辺を x で微分すると

$$\int_a^x f(t)dt + x f(x) + x f(x) = 1$$

$$\int_a^x f(t)dt + 2x f(x) = 1 \cdots \textcircled{1}$$

両辺を x で微分すると

$$f(x) + 2f(x) + 2x f'(x) = 0 \quad \therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{3}{2x}$$

両辺を x で積分すると

$$\log |f(x)| = -\frac{3}{2} \log |x| + C = \log e^C |x|^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore |f(x)| = e^C |x|^{-\frac{3}{2}}$$

$$x > 0, f(x) > 0 \text{ より, } f(x) = e^C x^{-\frac{3}{2}}$$

$$e^C = A \text{ とおくと, } f(x) = A x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } f(a) = \frac{1}{2a} \text{ より}$$

両辺に $x=a$ を代入して

$$f(a) = A a^{-\frac{3}{2}}$$

$$A a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2a} \quad \therefore A = \frac{1}{2} \sqrt{a}$$

$$\text{よって, } f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{a} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}$$

〔注〕例8より直接的に $f(x)$ を求めている。やっтерことは同じである。

例10

$F(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$ ならば, $F''(x) = f(x)$ となることを証明せよ。

〔解説〕

$x-t=u$ とおくと, $t=x-u$ より

$$\frac{dt}{du} = -1$$

t	$0 \rightarrow x$
u	$x \rightarrow 0$

よって

$$F(x) = \int_x^0 (x-u) f(u) (-du) = \int_0^x (x-u) f(u) du$$

$$= x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$$

$$F'(x) = \int_0^x f(u) du + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(u) du$$

$$\therefore F''(x) = f(x)$$

〔注〕 $f(x-t)$ を含むものは, $u=x-t$ とおく。

例11

微分可能な関数 $f(x)$ が, 次の関係を満足している。

$$f(x) = 1 + x^2 + \int_0^x e^{-t} f(x-t) dt$$

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $\int_0^x e^{-t} f(x-t) dt = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(4) $f(x)$ を求めよ。

〔解説〕

(1) $f(0) = 1$

t	$0 \rightarrow x$
u	$x \rightarrow 0$

(2) $x-t=u$ とおくと, $t=x-u$, $\frac{dt}{dx} = -1$ より

$$\int_0^x e^{-t} f(x-t) dt = - \int_x^0 e^{-x+u} f(u) du = e^{-x} \int_0^x e^u f(u) du = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

(3) (2)より

$$f(x) = 1 + x^2 + e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt \dots \textcircled{1}$$

両辺を x で微分すると

$$f'(x) = 2x + \left\{ -e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + e^{-x} \cdot e^x f(x) \right\}$$

$$f'(x) = 2x - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + f(x)$$

①より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + 1 + x^2 + e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

$$(4) f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C \text{ (} C \text{ は積分定数)}$$

(1)から, $f(0) = 1$ より

$$C = 1$$

よって

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

補1

$x > 0$ に対し関数 $f(x)$ を $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ と定め, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく。

(1) $\frac{d}{dx}f(x)$ を求めよ。

(2) $\frac{d}{dx}g(x)$ を求めよ。

(3) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ を求めよ。

解説

(1) $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(2) $\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right) = f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$

(3) $\frac{d}{dx}\left\{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ より

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = c$ (c は定数) ①

この等式で $x=1$ とおくと

$2f(1) = c$

$2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = c$ ②

$t = \tan \theta$ とおくと, $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より

$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

よって, $c = \frac{\pi}{2}$

したがって, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

t	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

補2

関数 $f(x)$ が $\int_a^{2x} f(t) dt = xe^x + x \int_0^1 f(t) dt$ を満たすとき、 $a = \boxed{}$ であり、このとき、 $f(x) = \boxed{}$ となる。

(解説)

$$\int_a^{2x} f(t) dt = xe^x + x \int_0^1 f(t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{ は定数}) \text{ とおくと}$$

$$\int_a^{2x} f(t) dt = xe^x + kx \cdots \textcircled{1}$$

両辺を x で微分すると

$$2f(2x) = (x+1)e^x + k$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) e^{\frac{x}{2}} + \frac{k}{2} = \frac{1}{4} (x+2) e^{\frac{x}{2}} + \frac{k}{2}$$

このとき

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{4} (t+2) e^{\frac{t}{2}} + \frac{k}{2} \right\} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} (t+2) e^{\frac{t}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} dt + \left[\frac{k}{2} t \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} e^{\frac{1}{2}} - 1 - \left[e^{\frac{t}{2}} \right]_0^1 + \frac{k}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{k}{2} \quad \therefore k = \sqrt{e} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } f(x) = \frac{1}{4} (x+2) e^{\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

①に $x = \frac{a}{2}$ を代入すると

$$0 = \frac{a}{2} e^{\frac{a}{2}} + \sqrt{e} \cdot \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} (e^{\frac{a}{2}} + \sqrt{e}) = 0$$

$$e^{\frac{a}{2}} + \sqrt{e} > 0 \text{ より, } a = \textcircled{0}$$

☞ 積分区間が定数のものと変数を含むものが混在するタイプの問題である。やることは変わらない。

補3

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能で

$$f(x) = 2e^{-x} + \int_0^x g'(t)dt, \quad g(x) = \cos x + \int_0^x tf(t)dt$$

を満たすとする。ただし、 $g'(t)$ は $g(t)$ の導関数である。 $k = \int_0^\pi g'(t)dt$

とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) k を求めよ。

(2) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

解説

(1) $f(x) = 2e^{-x} + k$ より

$$g(x) = \cos x + \int_0^x t(2e^{-t} + k)dt = \cos x + \int_0^x (2te^{-t} + kt)dt$$

$$g'(x) = -\sin x + 2xe^{-x} + kx$$

$$k = \int_0^\pi g'(t)dt \text{ より}$$

$$k = \int_0^\pi (-\sin t + 2te^{-t} + kt)dt$$

$$\int te^{-t}dt = -te^{-t} - \int (-e^{-t})dt = -(t+1)e^{-t} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \text{ より}$$

$$k = \left[\cos t - 2(t+1)e^{-t} + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^\pi = -1 - 2(\pi+1)e^{-\pi} + \frac{k}{2}\pi^2 - 1 + 2$$

$$= \frac{\pi^2}{2}k - 2(\pi+1)e^{-\pi}$$

$$\frac{\pi^2-2}{2}k = 2(\pi+1)e^{-\pi} \quad \therefore k = \frac{4(\pi+1)}{\pi^2-2}e^{-\pi}$$

(2) (1)より

$$f(x) = 2e^{-x} + \frac{4(\pi+1)}{\pi^2-2}e^{-\pi},$$

$$g(x) = \cos x + \int_0^x (2te^{-t} + kt)dt$$

$$= \cos x + \left[-2(t+1)e^{-t} + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^x = \cos x - 2(x+1)e^{-x} + \frac{k}{2}x^2 + 2$$

$$= \cos x - 2(x+1)e^{-x} + \frac{2(\pi+1)}{\pi^2-2}e^{-\pi}x^2 + 2$$

補4

関数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) を

$$f_1(x) = x,$$

$$f_n(x) = x + \frac{e}{2} \int_0^1 f_{n-1}(t) e^{x-t} dt \quad (n=2, 3, \dots)$$

によって定める。

(1) $f_2(x)$ を求めよ。

(2) $a_n = \int_0^1 f_n(t) e^{-t} dt$ とおく。 $n \geq 2$ のとき、 a_n を a_{n-1} で表せ。

(3) $f_n(x)$ を求めよ。

解説

$$(1) f_2(x) = x + \frac{e}{2} \int_0^1 f_1(t) e^{x-t} dt = x + \frac{e^{x+1}}{2} \int_0^1 t e^{-t} dt$$

ここで

$$\int_0^1 t e^{-t} dt = \left[-t e^{-t} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = -\frac{1}{e} + \left[-e^{-t} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

より

$$f_2(x) = x + \frac{e^{x+1}}{2} \left(1 - \frac{2}{e} \right) = x + \left(\frac{e}{2} - 1 \right) e^x$$

$$(2) f_n(x) = x + \frac{e^{x+1}}{2} \int_0^1 f_{n-1}(t) e^{-t} dt \text{ より}$$

$$f_n(x) = x + \frac{a_{n-1}}{2} e^{x+1}$$

このとき

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \left(t + \frac{a_{n-1}}{2} e^{t+1} \right) e^{-t} dt = \int_0^1 t e^{-t} dt + \frac{a_{n-1}}{2} e \int_0^1 dt \\ &= \left(1 - \frac{2}{e} \right) + \frac{a_{n-1}}{2} e \quad \therefore a_n = \frac{e}{2} a_{n-1} + 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

(3) $a_n = \frac{e}{2} a_{n-1} + 1 - \frac{2}{e}$ を変形すると

$$a_n + \frac{2}{e} = \frac{e}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{e} \right)$$

数列 $\left\{ a_n + \frac{2}{e} \right\}$ は、初項 $a_1 + \frac{2}{e}$ 、公比 $\frac{e}{2}$ の等比数列である

ここで、 $a_1 = \int_0^1 f_1(t) e^{-t} dt = \int_0^1 t e^{-t} dt = 1 - \frac{2}{e}$ から $a_1 + \frac{2}{e} = 1$ より

$$a_n + \frac{2}{e} = 1 \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{e}$$

よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$f_n(x) = x + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{e}{2}\right)^{n-2} - \frac{2}{e} \right\} e^{x+1}$$

$$\therefore f_n(x) = x + \left\{ \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\} e^x$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$f_n(x) = x + \left\{ \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\} e^x$$