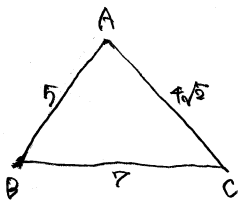


[1]



① 余弦定理より

$$(4\sqrt{5})^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos B$$

$$\therefore \cos B = \frac{5^2 + 7^2 - (4\sqrt{5})^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{9}{5}$$

$$\text{② } \cos B = \frac{9}{5}, 0 < B < \pi \text{ より}$$

$$\sin B = \frac{4}{5}$$

正弦定理より

$$2R = \frac{4\sqrt{5}}{\sin B}$$

$$\therefore R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

③ 中心角 = 2 × 円周角より

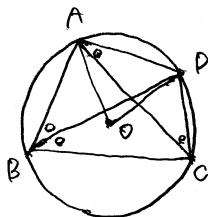
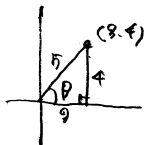
$$\begin{aligned} \angle AOD &= 2\angle APD \\ &= B \end{aligned}$$

$\triangle AOD$ で余弦定理より

$$AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos B$$

$$= 2 \cdot \frac{25 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{5} = 10$$

$$\therefore AD = \sqrt{10}$$



④ $\triangle AOD$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot R^2 \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{25 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{125}{2}$$

<point>

1. 余弦定理

2. 正弦定理

3. 三角形の面積

[2]

$$\text{① } \sin A \cos^2 A + \sin B \cos^2 B = (\sin A + \sin B) \cos^2 C$$

$$\sin A (1 - \sin^2 A) + \sin B (1 - \sin^2 B) = (\sin A + \sin B) \cos^2 C$$

$$\sin A + \sin B - (\sin^3 A + \sin^3 B) = (\sin A + \sin B) (1 - \sin^2 C)$$

$$\sin A + \sin B \neq 0 \text{ より}$$

$$\sin A - \sin A \sin B + \sin B - \sin^2 B = \sin^2 C$$

正弦定理より

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 - \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$a^2 - ab + b^2 = c^2 \quad (R: \triangle ABC \text{ の外接円の半径})$$

余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$$

$$0 < C < 180^\circ \text{ より } C = 60^\circ$$

$$\text{② } \sin A = \sqrt{3} - 1, \sin B$$

$$A + B = 120^\circ \text{ より}$$

$$\sin A = (\sqrt{3} - 1) \sin (120^\circ - A)$$

$$\sin A = (\sqrt{3} - 1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A \right)$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \sin A$$

$$\sin A = \cos A$$

$$\tan A = 1$$

$$0 < A < 180^\circ \text{ より } A = 45^\circ, B = 75^\circ$$

<point>

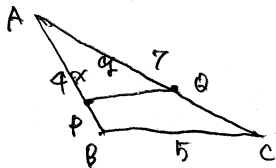
1. 三角形の円周角

辺の長さの対する正弦定理を利用

(正弦定理, 余弦定理を利用)

3

d)



余弦定理より

$$5^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{5}{7}$$

② $\cos A = \frac{5}{7}$, $0 < A < \pi$ より

$$\sin A = \frac{\sqrt{6}}{7}$$

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin A = 4\sqrt{6}$$

③ $\triangle APB \sim \frac{1}{2} \triangle ABC$ より

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin A$$

$$\therefore \frac{1}{2} = 14$$

④ $\triangle APB$ で余弦定理より

$$PB^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos A$$

$$= \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{5}{7} = -\frac{19}{28}$$

相加相乗平均より

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

等号成立は

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

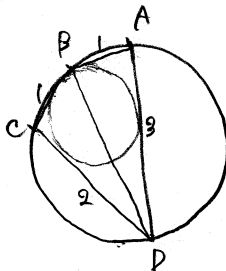
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \therefore \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\therefore PB$ の長さは $\frac{1}{4}$ のとき最小であり

最小値 $\frac{1}{4}$

4

d)



$$\angle BCD = \theta \text{ とおく } \angle BAD = (80 - \theta)$$

(円周角の定理より $\angle BCD = 2\angle BAD$)

$\triangle BCD$ で余弦定理より

$$BD^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos \theta$$

$$= 5 - 4 \cos \theta \dots ①$$

$\triangle BDA$ で余弦定理より

$$BD^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos(180 - \theta)$$

$$= 10 + 6 \cos \theta \dots ②$$

①, ②より

$$5 - 4 \cos \theta = 10 + 6 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{5}{10} \therefore \theta = 120^\circ$$

また

$$BD^2 = 7 \therefore BD = \sqrt{7}$$

③ 19012 $\triangle BCD$ の面積 S は

$$S = \triangle BCD + \triangle DAB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sin(180 - \theta)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

④ 19012 $\triangle BCD$ の外接円の半径 R は

半径 R とすると

$$2R = \frac{\sqrt{7}}{\sin \theta} \therefore R = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

⑤ 面積 S は

$$S = \pi R^2 = \frac{7}{4} \pi$$

④ 図のように

直線BCと直線ADの交点を
Eとす。AE=x, BE=yとす

$\triangle ECD \sim \triangle EAB$ より

$$\begin{cases} x: y+1 = 1:2 \\ y: x+3 = 1:2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = y+1 \\ 2y = x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = y+1 \\ 2y = x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\therefore x = \frac{5}{3} \quad y = \frac{7}{3}$$

図のように半径2の円の中心Oと半径rとす

$\triangle ODE = \triangle OCE + \triangle ODE + \triangle OEC$ より

$$\frac{1}{2} \left(2 + \frac{14}{3} + \frac{10}{3} \right) r = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{10}{3} \cdot \sin 120^\circ$$

$$10r = \frac{10}{3} \sqrt{3} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

[5]

$$\text{円周率} = \frac{\text{円周} = l}{\text{直径}}$$

半径rの円に内接する正n角形の辺の長さをL_nとす

$$L_n < l$$

$$\therefore \frac{L_n}{2r} < \frac{l}{2r}$$

$\frac{L_n}{2r} > 3.05$ とす
 $\triangle OAB$ より $\angle AOB = 120^\circ$
余弦定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos 90^\circ \\ &= 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore AB = \sqrt{2-\sqrt{3}} r$$

よって

$$L_n = 12 \sqrt{2-\sqrt{3}} r$$

より

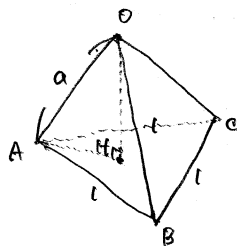
$$\frac{L_n}{2r} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} = 6 \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6\sqrt{3}-1}$$

$$> 3 \cdot 1.41 \cdot 0.78 > 3.05 \quad \square$$

<point>

1. 正n角形の辺の長さをL_nとす

[6]



① Hは△ABCの外心より

△ABCの外接円の半径をRとす

△ABCで正弦定理より

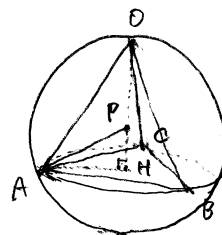
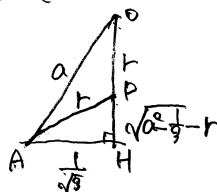
$$2R = \frac{l}{\sin 60^\circ} \quad \therefore R = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad \therefore AH = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

② 三平方の定理より

$$DH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{3}}$$

③ 球の中心をPとす

HはOとPに直して通る
点とす

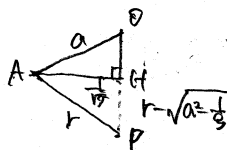


△PAHで三平方の定理より

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\sqrt{a^2 - \frac{l^2}{3}} - r \right)^2 + \frac{l^2}{9} \\ &= a^2 - \frac{l^2}{3} - 2r \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{3}} + r^2 + \frac{l^2}{9} \end{aligned}$$

$$2r \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{3}} = a^2 \quad \therefore r = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{l^2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{3a^2 - l^2}}$$

HはOとPに直して通る点とす



△PAHで三平方の定理より

$$R^2 = \left(r - \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{3}} \right)^2 + \frac{l^2}{9}$$

$$\text{いすかにして} \quad r = \frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{3a^2 - l^2}}$$

<point>

1. 三脚の半径

$$OA=OB=OC \text{ となる}$$

から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足

H は $\triangle ABC$ の外心である

[証明]

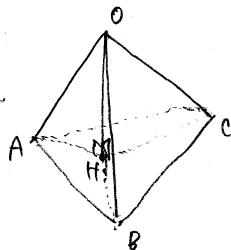
$$\triangle OAH \cong \triangle OBH \cong \triangle OCH \text{ より}$$

($OA=OB=OC$, OH 共通であり

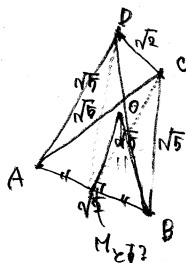
直角 = 直角の斜辺代 (四角形より))

$$AH=BH=CH$$

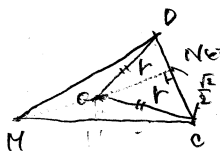
よって H は $\triangle ABC$ の外心である。



[8]



外接球の中 O は平面 MOB 上にある。



$$MC = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad MN = \sqrt{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}} = 2$$

$$OM = 2 - \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}$$

$\triangle OMB$ で三平方の定理より

$$r^2 = (2 - \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}})^2 + \frac{1}{2}$$

$$= 4 - 4\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}} + r^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$r^2 - \frac{1}{2} = 1$$

$$r^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

[7]

手間の面体は直方体の中にある

から

図のように a, b, c とおく

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 81 \dots ① \\ b^2 + c^2 = 64 \dots ② \\ c^2 + a^2 = 49 \dots ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 81 \dots ① \\ b^2 + c^2 = 64 \dots ② \\ c^2 + a^2 = 49 \dots ③ \end{cases}$$

①+②+③より

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 194$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 97$$

$$\therefore a^2 = 33, \quad b^2 = 48, \quad c^2 = 16$$

$$\therefore a = \sqrt{33}, \quad b = 4\sqrt{3}, \quad c = 4$$

手間の体積 V は

$$V = \sqrt{33} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{33} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4$$

$$= 16\sqrt{11}$$

<point>

1. 手間の面体

手間の面体は手間の面体である

2. 手間の面体は直方体の中にある

[別解]

四面体 $ABCD$ は手間の面体であるから

図のような直方体の中にあると仮定して

四面体 $ABCD$ の外接球は

この直方体の外接球でもあるから

外接球の半径は $\frac{1}{2}$ の直方体の対角線の

長さの半分である。

