

高3理系数学 標準問題演習 1. 極限(1)

□1 [I. 宇都宮大 II. 2013 関西学院大 III. 2019 産業医科大]

I. $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ とするとき、次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3}$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^4}$

II. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 4n^3 + 6n^2 - n$ ($n \geq 1$) で表されるとき、次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$ を求めよ.

(3) $T_n = \sum_{k=1}^n a_{2k}$ を求めよ. また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ.

(4) $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ を求めよ.

III. 数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^9 - n^6} - n^3)$ の値は である.

□2 [(1) 2003 弘前大 (2) 2012 京都大]

(1) r を正の定数とする. 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}}$ を求めよ.

(2) a が正の実数のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

□3 [1996 芝浦工業大]

極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots + \log \frac{n+1}{n} - \log n \right)$ を求めよ.

ただし、対数は自然対数である.

□4 [1998 立命館大]

$0 < a < b$ である定数 a, b がある. $x_n = \left(\frac{a^n}{b} + \frac{b^n}{a} \right)^{\frac{1}{n}}$ とおくとき

(1) 不等式 $b^n < a(x_n)^n < 2b^n$ を証明せよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ.

高3理系数学 標準問題演習 1.極限(1)

5 [2009 慶応義塾大]

実数 α に対して α を超えない最大の整数を $[\alpha]$ と書く。[] をガウス記号という。

- (1) 自然数 m の桁数 k をガウス記号を用いて表すと $k = \left\lceil \frac{m}{10^{\left\lfloor \frac{m}{10} \right\rfloor}} \right\rceil$ である。
- (2) 自然数 n に対して 3^n の桁数を k_n で表すと $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = \frac{1}{\log 3}$ である。

6 [I. 2003 神戸大 II. 2016 大分大]

I. 座標平面上の点 (p, q) で、 p と q がともに整数であるものを格子点という。

- (1) 自然数 n に対し、 $p+2q=n$, $p>0$, $q>0$ を満たす格子点 (p, q) の個数を a_n とする。 a_n を求めよ。
- (2) 自然数 n に対し、 $p+2q \leq n$, $p>0$, $q>0$ を満たす格子点 (p, q) の個数を b_n とする。 b_n を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2}$ を求めよ。

II. 自然数 n に対して関数 $y=2nx-x^2$ のグラフと x 軸で囲まれた領域 (境界を含む) R_n を考える。

- (1) 領域 R_n に含まれる格子点 (x 座標と y 座標がともに整数である点) の数 S_n を求めよ。
- (2) 点 A $(0, 0)$, B $(2n, 0)$, および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域 (境界を含む) に含まれる格子点の数 T_n を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

高3理系数学 標準問題演習 1.極限(1)

7 [2006 関西学院大]

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, …… は k が k 個 ($k=1, 2, 3, \dots$) ずつ続く数列である。この数列の第 n 項を a_n と表す。

- (1) $a_n = k$ となるような n の範囲を k を用いて表し、 a_{100} の値を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^{100} a_n$ の値を求めよ。
- (3) 初項から第 100 項 a_{100} までの間に、偶数が何個現れるか答えよ。ただし、同じ数が繰り返し現れる場合は重複して数える。例えば、初項から第 8 項までの間には偶数が 4 個現れる。
- (4) 上の (1) で求めた不等式を用いて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

8 [I. 2024 千葉大 II. 2017 神戸大 III. 2024 大阪大]

I. n を正の整数とする。 x の関数 $f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n-3)x + 1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) α を方程式 $f(x) = 0$ の 1 つの解とする。 $f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ。

II. n を自然数とする。

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく。 $3 < \pi < 4$ であることを用いて、次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $f''(x) < 0$ であることを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。
- (3) (2) における解を x_n とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ であることを示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ を求めよ。

高3理系数学 標準問題演習 1.極限(1)

Ⅲ. 自然数 n に対して, 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める。ただし, e は自然対数の底である。

- (1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は, ただ1つの実数解をもつことを示せ。
- (2) (1)における実数解を a_n とおくと, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ。