標準問題演習 11. 漸化式

1

(1) $a_1=3$.

$a_{n+1}=(n+2)a_n+n!$

両辺 $(n+2)!$ で割って

$$\frac{a_{n+1}}{(n+2)!}=\frac{a_n}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$b_n=\frac{a_n}{(n+1)!}$ とおくと $b_1=\frac{a_1}{2}=\frac{3}{2}$

$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ← 階差型 //

(2) $c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k \quad (n\geqq 2)$$

$$=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=2-\frac{1}{n+1}$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$b_n=2-\frac{1}{n+1} \quad (n\geqq 1)=\frac{2n+1}{n+1}$$

$b_n=\frac{a_n}{(n+1)!}$ より

$$a_n=(n+1)!\,b_n$$

$$=(2n+1)\cdot n! \text{ //}$$

〈point〉

1. 漸化式 (階差型)

2

(1) $a_1=1$.

$$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1} \quad (n\geqq 2)$$

$$=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdots\cdots\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}$$

これは $n=1$ のときも成り立つから $a_n=\frac{2}{n(n+1)} \quad (n\geqq 1)$

[別解]

$$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$$

$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$

両辺 n をかけて

$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}$

$b_n=(n+1)na_n$ とおくと $b_1=2\cdot 1\cdot a_1=2$

$b_n=b_{n-1}$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=2$ の定数列より

$b_n=2$

$b_n=n(n+1)a_n$ とおくと

$$a_n=\frac{b_n}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)} \text{ //}$$

(2) $b_1=1$

$$b_n=\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}b_{n-1}=\frac{n(n+1)+1}{n(n-1)+1}b_{n-1} \quad (n\geqq 2)$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{n(n-1)+1}\cdot\frac{(n-1)n+1}{(n-1)(n-2)+1}b_{n-2}$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{n(n-1)+1}\cdot\frac{(n-1)n+1}{(n-1)(n-2)+1}\cdots\cdots\frac{3\cdot 4+1}{3\cdot 2+1}\cdot\frac{2\cdot 3+1}{2\cdot 1+1}b_1$$

$$=\frac{n^2+n+1}{3} \text{ //}$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$b_n=\frac{n^2+n+1}{3} \quad (n\geqq 1)$$

(3) $a_1 b_1 = 1$

$a_n b_n = \frac{n^3-1}{n^3+1} a_{n-1} b_{n-1}$

$c_n = a_n b_n$ とおくと $c_1 = a_1 b_1 = 1$

$c_n = \frac{n^3-1}{n^3+1} c_{n-1}$

より

$c_n = a_n b_n = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$ //

(4) $c_n = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ $= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{1+\frac{1}{k(k+1)}\right\}$

$= \frac{2}{3}\left(n+1-\frac{1}{n}\right)$ //

<point>

1. 漸化式(階差型)

3

(1) $a_1 = 3$

$a_{n+1} = 2a_n + 1$ $\alpha = 2\alpha + 1$ $\therefore \alpha = -1$

$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

$\{a_n + 1\}$は初項 $a_1 + 1 = 4$
公比2の等比数列より

$a_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_n = 2^{n+1} - 1$ //

(2) $b_1 = 2$

$b_{n+1} = 2b_n + n$

$b_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(b_n + \alpha n + \beta)$ とおくと

$b_{n+1} = 2b_n + \alpha n - \alpha + \beta$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 1 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$ $\therefore \alpha = 1, \beta = 1$

$\therefore b_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(b_n + n + 1)$

$\{b_n + n + 1\}$は初項 $b_1 + 2 = 4$
公比2の等比数列より

$b_n + n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore b_n = 2^{n+1} - n - 1$ //

(3) $c_1 = 2$

$c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{2}n(n-1)$

$c_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 2(c_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$ とおくと

$c_{n+1} = 2c_n + \alpha n^2 + (-2\alpha + \beta)n - \alpha - \beta + \gamma$

$\therefore \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ -2\alpha + \beta = -\frac{1}{2} \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ $\therefore \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$

$\therefore c_{n+1} + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) + 1 = 2\left(c_n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1\right)$

$\{c_n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1\}$は初項 $c_1 + 2 = 4$
公比2の等比数列より

$c_n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore c_n = 2^{n+1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1$ //

<point>

1. 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ $(p \neq 0, 1,\ q \neq 0)$ 型
1次式
2次式

4

(1) $a_2 = -a_1 + 1 = 0$

$a_3 = -2a_2 + 3 = 3$

$a_4 = -a_3 + 1 = -2$

$a_5 = -2a_4 + 3 = 7$ //

(2) $a_{2n+1} = -2a_{2n} + 3$

$= -2(-a_{2n-1} + 1) + 3$

$= 2a_{2n-1} + 1$

$b_n = a_{2n-1}$ より $b_1 = a_1 = 1$

$b_{n+1} = 2b_n + 1$ $\alpha = 2\alpha + 1$ $\therefore \alpha = -1$

$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

$\{b_n + 1\}$は初項 $b_1 + 1 = 2$
公比2の等比数列より

$b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$ $\therefore b_n = 2^n - 1$

$c_n = a_{2n}$

$= -a_{2n-1}+1$

$= -b_n+1 = -2^n+2$ //

(3) $T_m = \sum_{k=1}^{m} b_k + \sum_{k=1}^{m-1} c_k$

$= \sum_{k=1}^{m}(2^k-1) + \sum_{k=1}^{m-1}(-2^k+2)$

$= \sum_{k=1}^{m}(2^k-1) + \sum_{k=1}^{m}(-2^k+2) - (-2^m+2)$

$= \sum_{k=1}^{m} 1 + 2^m - 2$

$= 2^m + m - 2$ //

$\boxed{5}$

(1) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

89, 144, 233, 377, 610, 987, …… より

$a_{10}=55$, $a_{16}=987$ //

(2) $a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$

$a_{n+2}-(p+q)a_{n+1}+pqa_n=0$ より

$$\begin{cases} p+q=1 \\ pq=-1 \end{cases}$$

$t^2-(p+q)t+pq=0$ すなわち

$t^2-t-1=0$ の2解は p, q より

$(p, q) = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}, \frac{1-\sqrt5}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt5}{2}, \frac{1+\sqrt5}{2}\right)$ //

(3) (2) より

$\{a_{n+1}-pa_n\}$ は初項 $a_2-pa_1=1-p$

公比 q の等比数列より

$a_{n+1}-pa_n=(1-p)q^{n-1}$

$$\begin{cases} a_{n+1}-\frac{1+\sqrt5}{2}a_n=\frac{1-\sqrt5}{2}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} \cdots ① \\ a_{n+1}-\frac{1-\sqrt5}{2}a_n=\frac{1+\sqrt5}{2}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1} \cdots ② \end{cases}$$

①−② より

$-\sqrt5 a_n = \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$

$\therefore a_n = \frac{1}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right\}$ //

(4) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より

$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

よって

$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$

$=(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})$

$=a_{n+2}-a_2$

$=\frac{1}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2}\right\}-1$ //

<point>

1. 3項間漸化式の解き方
2. フィボナッチ数列

$\boxed{6}$.

(1) $a_1=4$, $b_1=2$, $a_{n+1}=a_n^2b_n$, $b_{n+1}=a_nb_n^2$

底を2とする対数をとって

$\alpha_1=2$, $\beta_1=1$

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}=2\alpha_n+\beta_n \cdots ① \\ \beta_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n \cdots ② \end{cases}$$

①+② より

$\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}=3(\alpha_n+\beta_n)$

$\{\alpha_n+\beta_n\}$ は初項 $\alpha_1+\beta_1=3$

公比3の等比数列より

$\alpha_n+\beta_n=3\cdot3^{n-1}$

$\therefore \alpha_n+\beta_n=3^n$ // ③

(2)は略

(3) ①−② より

$\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}=\alpha_n-\beta_n$

$\{\alpha_n-\beta_n\}$ は初項 $\alpha_1-\beta_1=1$ の定数列より

$\alpha_n-\beta_n=1 \cdots ④$

③, ④ より

$\alpha_n=\frac{3^n-1}{2}$ $\therefore \log_2 a_n=\frac{3^n-1}{2}$

$\log_2(a_1a_2^2\cdots a_n^n)$

$=\log a_1+2\log a_2+\cdots+n\log a_n$

$=\frac{1}{2}\{3+2\cdot3^2+\cdots+n\cdot3^n-(1+2+\cdots+n)\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2n-1}{4}\cdot3^{n+1}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$=\frac{1}{8}\{(2n-1)\cdot3^{n+1}-2n(n+1)+6\}$ //

<point>

1. 連立漸化式

$\boxed{7}$

(1) $p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$

$(q-s)\sqrt{2}=r-p$

$q-s\neq 0$と仮定すると

$\sqrt{2}=\dfrac{r-p}{q-s}$ (有理数)

となり矛盾.

よって $q=s$

このとき $p=r$

よって題意は示された □

(2) (i) $n=1$のとき

$a_1=3,\ b_1=2$ より 成立.

(ii) $n=k$ ($k=1,2,\cdots$) のとき成り立つと仮定して

$n=k+1$のとき成り立つことを示す

$(3+2\sqrt{2})^{k+1}=(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{k}$

$a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})(a_k+b_k\sqrt{2})$ (a_k, b_k:整数)

$=(3a_k+4b_k)+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}$

(1)より

$$\begin{cases} a_{k+1}=3a_k+4b_k \text{ (整数)} \\ b_{k+1}=2a_k+3b_k \text{ (整数)} \end{cases}$$

よって成り立つ

(i), (ii)から数学的帰納法より

題意は示された □

(3) (i) $n=1$のとき

$a_1=3,\ b_1=2$ は

$3^2-2\cdot 2^2=1$ より $x^2-2y^2=1$の解である

(ii) $n=k$ ($k=1,2,\cdots$) のとき成り立つと仮定して

$a_k^2-2b_k^2=1$

$n=k+1$のとき成り立つことを示す

$a_{k+1}^2-2b_{k+1}^2=(3a_k+4b_k)^2-2(2a_k+3b_k)^2$

$=a_k^2-2b_k^2=1$

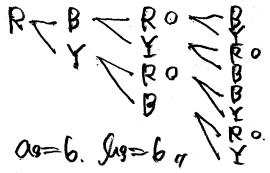
よって成り立つ

(i), (ii)から数学的帰納法より

題意は示された □

$\boxed{8}$

(1)



$a_3=6.\ b_3=6$ //

$a_4=6.\ b_4=18$ //

(2) nマス　　$n+1$マス

$$\begin{tikzcd} a_n \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "2"'] & a_{n+1} \\ b_n \arrow[ur, "1"] \arrow[r, "1"'] & b_{n+1} \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} a_{n+1}=b_n \cdots ① \\ b_{n+1}=2a_n+b_n \cdots ② \end{cases}$$

$a_3=6.\ b_3=6$

①, ②より

$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

$a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=0$

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1, 2$

これは

$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$と変形できるから

$\{a_{n+1}-a_n\}$は初項$a_4+a_3=12$

公比2の等比数列より

$a_{n+1}+a_n=12\cdot 2^{n-3}$

$=3\cdot 2^{n-1}\cdots ①$

また

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$と変形できるから

$\{a_{n+1}-2a_n\}$は初項$a_4-2a_3=-6$

公比-1の等比数列より

$a_{n+1}-2a_n=(-6)\cdot(-1)^{n-3}$

$=6\cdot(-1)^{n-2}\cdots ②$

①−②より

$3a_n=3\cdot 2^{n-1}-6\cdot(-1)^{n-2}$

$\therefore a_n=2^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}$

$b_n=a_{n+1}=2^{n}+2\cdot(-1)^{n}$ //

<point>

1. 場合の数と漸化式