

高3理系数学 発展問題演習 12. 体積(3)・種々の量の計算

1 [2010 早稲田大]

xyz 空間において、2 点 $P(1, 0, 1)$, $Q(-1, 1, 0)$ を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転して得られる曲面を S とする。

(1) 曲面 S と、2 つの平面 $x=1$ および $x=-1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

(2) (1) の立体の平面 $y=0$ による切り口を、平面 $y=0$ 上において図示せよ。

(3) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{t^2+1} dt$ の値を $t = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$ と置換することによって求めよ。これを用いて、(2) の切り口の面積を求めよ。

2 [2024 東京大]

座標空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり、 D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

3 [1998 立教大]

半径 1 の円板が、その中心 O において直線 l と角度 θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ で交わっている。 l

には、 O を原点とする座標が定まっているものとする。

(1) l 上の点 x において、 l と直交する平面と円板が交わるための、 x の範囲を求めよ。

(2) (1) における平面と円板の交わり上の点と、点 x との距離の最大値 $a(x)$, 最小値 $b(x)$ を求めよ。

(3) l を軸として、円板を回転してできる立体の体積を求めよ。

4 [2010 京都大]

座標空間内で、 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 1)$, $G(0, 1, 1)$ を頂点にもつ立方体を考える。この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

高3理系数学 発展問題演習 12. 体積(3)・種々の量の計算

5 [2013 大阪大]

xyz 空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸の周りに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

6 [I. 東北大 II. 2016 藤田保健衛生大]

I. xyz 空間の 4 点 $(0, 0, 0)$, $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $(\cos \theta, \sin \theta, \theta)$, $(0, 0, \theta)$ を頂点とする長方形を R_θ とし, θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変化するとき, R_θ が動いてできる立体を K とする。

(1) K を平面 $z=t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) で切ったときの切り口の面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

II. 一辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 BC , 辺 DH , 辺 EF 上に 3 点 P, Q, R を $BP=DQ=ER=t$ となるようにとり, 三角形 PQR を作る。 t が 0 から 1 まで動くとき, この三角形が通過してできる立体の体積を求めよ。

7 [2009 東京工業大]

xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) ℓ 上の点 $(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3})$ を通り ℓ と垂直な平面が, xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式 $0 \leq y \leq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。 ℓ を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

8 [2003 東北大]

xyz 空間内に 2 点 $P(u, u, 0)$, $Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を考える。 u が 0 から 1 まで動くとき, 線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u, 0, 0)$ ($0 \leq u \leq 1$) と線分 PQ の距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

高3理系数学 発展問題演習 12. 体積(3)・種々の量の計算

9 [大阪大]

座標平面上の半径 r ($0 < r < 1$) の円板 D が、原点を中心とする半径 1 の円に内接しながらすべらずに転がるとき、 D 上の定点 P の動きを調べる。ただし、 D の中心は原点のまわりを反時計まわりに進むものとする。初めに D の中心と点 P は、それぞれ $(1-r, 0)$,

$(1-r+a, 0)$ の位置にあるものとする。 ($0 < a < r$)

(1) D が長さ θ だけころがった位置にきたとき、点 P の座標 (x, y) を θ を用いて表せ。

(2) D が転がり続けるとき、点 P がいつか最初の位置に戻るための r の条件を求めよ。(3)

$r = \frac{1}{2}$ のとき、点 P の軌跡を求め図示せよ。

10 [1998 早稲田大]

放物線 $C: y = \frac{x^2}{2}$ とその焦点 $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $P(u, v)$ ($u > 0$) における C の接線 l と x 軸との交点を T とする。線分 PT と線分 FT は直交することを示せ。

(2) 線分 FT の長さを求めよ。

(3) $\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{1+x^2})$ を求めよ。

(4) 放物線 C の、 $x=0$ から $x=u$ までの長さを $s(u)$ とする。また、点 P からの距離が $s(u)$ となる l 上の点のうちで、 T に近い方の点を Q とする。このとき、線分 QT の長さを求めよ。

(5) C が x 軸に接しながら、すべらないように右の方に傾いていくとき、焦点 F の軌跡を求めよ。

11 [2003 北海道大]

曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸の周りに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h 、体積を V とする。 V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。