

標準問題演習 9. 指数対数関数

[1]

$$d) 64^{95} = (2^6)^{95} = (2^{18})^{30}$$

$$65^{90} = (5 \cdot 13)^{90}$$

$$2^{18} \approx 1024 \cdot 512 > 5 \times 10^5$$

$$65^3 = 3^3 \cdot 13^3 = 30 \cdot 20^3 < 24 \cdot 10^3 \text{ より}$$

$$2^{18} > 65^3$$

よって

$$64^{95} > 65^{90}$$

$$e) 64^{95} = (2^{58})^{10}$$

$$63^{100} = (63^{10})^{10}$$

$$63^{10} = 3^{20} \cdot 7^{10} > 2^{90} \cdot 2^5 \cdot 2^{22} = 2^{117} \text{ より}$$

$$63^{10} > 2^{117}$$

$$63^{100} > 64^{95}$$

<print>

1. 近似計算と区間法を用いて比較する。

[2]

$$d) t = 2^x 2^{-x} \geq 2 \sqrt{2^x 2^{-x}} = 2 \text{ (相乗平均不等式)}$$

等号成立は

$$2^x = 2^{-x}$$

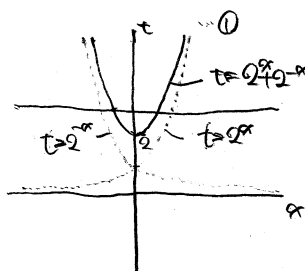
$$2^{2x} = 1 \quad \therefore x = 0 \text{ のとき}$$

よって

$$t \geq 2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2^x 2^{-x})^2 - 2a(2^x 2^{-x}) + a^2 + 2a - 5 \\ &= t^2 - 2at + a^2 + 2a - 5 \end{aligned}$$

$$e) t^2 - 2at + a^2 + 2a - 5 = 0, t \geq 2$$



$$t = 2 \text{ のとき}$$

$$1 \text{ のときに } 2 \text{ 以上 } 1 \text{ のとき}$$

$$t > 2 \text{ のとき}$$

$$a > 2$$

0 < t < 2

f(t) = 0 となる t の存在範囲を調べる

① t の存在範囲として t > 2 に要する条件を調べる

$$t > 2 \text{ のとき } g(a) = t^2 - 2at + a^2 + 2a - 5 > 0$$

① の判別式を D とする

$$\begin{cases} D > 0 : a^2 - (a^2 + 2a - 5) > 0 \quad \therefore a < \frac{5}{2} \quad \text{②} \\ \text{軸} > 2 : a > 2 \quad \text{③} \\ g(2) > 0 : g(2) = a^2 - 2a - 3 > 0 \end{cases}$$

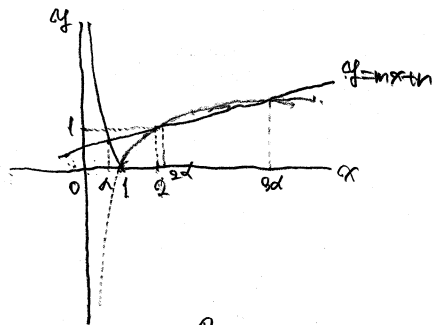
$$(a+1)(a-3) > 0 \quad \therefore a < -1, a > 3$$

② ~ ③ より

$$3 < a < \frac{5}{2}$$

3

$$d) y = |\log_2 x|$$



e) $mx+n=|\log_2 x|$ の実数解は

$y = mx+n$ と $y = \log_2 x$ の交点の x 値に等しい。

題意より 3つの実数解は $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ ($\alpha > 0$) とする。

$\alpha < 1$ は明か。

$$2\alpha < 1 < 3\alpha \text{ ならば } \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2} \text{ とする}$$

$y = mx+n$ は $(\alpha, -\log_2 \alpha), (2\alpha, -\log_2 2\alpha)$ を通る。

$$m = \frac{-\log_2 2\alpha + \log_2 \alpha}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$n = -\log_2 \alpha + 1$$

このとき $y = mx+n$ と $y = \log_2 x$ の交点の x 値は

$$-\frac{1}{\alpha} x - \log_2 \alpha + 1 = 0$$

$$\therefore x = \alpha(1 - \log_2 \alpha) < 1$$

よって ①は 2, 3 3つの実数解を有しない。

よって $\alpha < 1 < 2\alpha < 3\alpha$

このとき $y = mx+n$ と $y = |\log_2 x|$ の交点の

$y = mx+n$ 上に $2\alpha, 3\alpha$ あり

$$2 \log_2 2\alpha = -\log_2 \alpha + \log_2 3\alpha$$

$$\log_2 (2\alpha) = \log_2 3$$

$$(2\alpha)^2 = 3$$

$$\alpha^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって 2つの解は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

4

$$a^{\frac{2}{x-1}} < a^{\frac{1}{x-1}} - a^{\frac{1}{x-5}}$$

両辺 $a^{\frac{1}{x-1}} > 0$ より

$$a \cdot a^{\frac{1}{x-1}} - (a^{\frac{1}{x-1}}) a^{\frac{1}{x-5}} < 0$$

$$a^{\frac{1}{x-1}}$$

$$(a^{\frac{1}{x-5}})(a^{\frac{1}{x-1}}) < 0$$

$$a^{\frac{1}{x-5}} > 0 \text{ より}$$

$$a^{\frac{1}{x-5}} < 0$$

$$\therefore a^{\frac{1}{x-5}} < 0$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } x > 5$$

$$a > 1 \text{ のとき } x < 5$$

$$2 \log_a (x-2) \geq \log_a (x-2) + \log_a 5$$

$$\log_a (x-2) \geq \log_a 5(x-2)$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } 5(x-2) > 0 \text{ より } x > 2$$

$$(x-2)^2 \leq 5(x-2)$$

$$(x-2)(x-7) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq x \leq 7$$

$$a > 1 \text{ のとき } x \geq 7$$

よって 2つの解は

$$0 < a < 1 \text{ のとき } 5 < x \leq 7$$

$$a > 1 \text{ のとき } x \geq 7$$

5

$$\log_2 x - (\log_2 4)(\log_2 4) < 4(\log_2 x - \log_2 4)$$

変数 $x > 0, x \neq 1, 4 > 0$

$$x > 0, x \neq 1, 4 > 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} - \log_2 4 \frac{\log_2 4}{\log_2 x} < 4(\log_2 x - \log_2 4)$$

$$X = \log_2 x, Y = \log_2 4 \text{ とおくと } X \neq 0$$

$$\frac{1}{X} - \frac{Y^2}{X} < 4(X - Y)$$

$$X - XY^2 < 4X^2(X - Y)$$

$$X - XY^2 < 4X^2 - 4XY$$

$$\therefore X(4X^2 - 4XY + Y^2 - 1) > 0$$

① $X > 0$ のとき

$$\log_2 x > 0 \text{ より } x > 1$$

$$4X^2 - 4XY + Y^2 - 1 > 0$$

$$(2X - Y)^2 - 1 > 0$$

$$(2X - Y + 1)(2X - Y - 1) > 0$$

$$\therefore \begin{cases} 2X - Y + 1 > 0 \\ 2X - Y - 1 > 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 2X - Y + 1 < 0 \\ 2X - Y - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \log_2 4 < \log_2 2x^2 \\ \log_2 4 < \log_2 \frac{x^2}{2} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \log_2 4 > \log_2 2x^2 \\ \log_2 4 > \log_2 \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 4 < 2x^2 \\ 4 < \frac{x^2}{2} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 4 > 2x^2 \\ 4 > \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

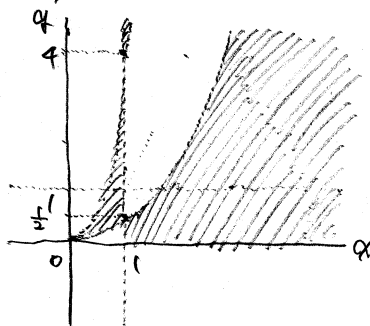
② $X < 0$ のとき

$$\log_2 x < 0 \text{ より } 0 < x < 1$$

$$4X^2 - 4XY + Y^2 - 1 < 0$$

$$\begin{cases} 4 < 2x^2 \\ 4 > \frac{x^2}{2} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 4 > 2x^2 \\ 4 < \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

③ ①, ② より



③ ①, ② より ③ の解は

$x > 1$ と $0 < x < 1$ の場合

6

$$d) 2^{8.5} < 10^2$$

$$2^{8.5}, 10^2 > 0 \text{ より } (2^{8.5})^2 < (10^2)^2 \text{ であり}$$

$$(2^{8.5})^2 = 2^{17} = 8.1224 < 10^4 = (10^2)^2$$

よって ③ は

$$e) 0.30 < \log_{10} 2 \text{ であり}$$

$$10^3 < 2^{10} \text{ より}$$

$$3 < \log_{10} 2^{10}$$

$$3 < 10 \log_{10} 2$$

$$\frac{3}{10} < \log_{10} 2 \therefore 0.30 < \log_{10} 2$$

$$\log_{10} 2 < 0.31 \text{ であり}$$

d) より

$$6.5 \log_{10} 2 < 4$$

$$\log_{10} 2 < \frac{4}{6.5} < 0.31$$

よって ③ は

$$f) 0.47 < \log_{10} 3 \text{ であり}$$

$$3^7 > 2000 \text{ より}$$

$$\forall \log_{10} 3 > 3 + \log_{10} 2 > 3.3 \text{ (d) より)}$$

$$\log_{10} 3 > \frac{3.3}{7} > 0.47$$

$$\log_{10} 3 < 0.48 \text{ であり}$$

$$3^7 < 2500 \text{ より}$$

$$7 \log_{10} 3 < 3 - 2 \log_{10} 2 < 2.4$$

$$\therefore \log_{10} 3 < 0.48 \text{ (d) より}$$

よって ③ は

1. 常に成立

7

$$\text{I. d) } \log_{10} N = 100 \log_{10} 2 \\ = 100 \cdot 0.3010 = 30.1$$

$$30 < \log_{10} N < 31 \text{ より}$$

$$10^{30} < N < 10^{31}$$

$$\text{よって } N \text{ は } 31 \text{ 桁, } 90 + \log_{10} 2$$

$$\text{e) } 30 < \log_{10} N < 30.3010 \text{ より}$$

$$1 \cdot 10^{30} < N < 2 \cdot 10^{30}$$

$$\text{よって } N \text{ の最高位の数は } 1$$

$$\text{g) } \log_{10} 2 = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

$$2 \log_{10} 2 = 0.6020 + 0.4771 = 1.0791$$

$$30.0791 < \log_{10} N < 30.1139 \text{ より}$$

$$29 + 1.0791$$

$$29 + 1.1139$$

$$12 \cdot 10^{29} < N < 19 \cdot 10^{29}$$

$$\text{よって } N \text{ の桁数は } 30 \text{ 桁以下のものである$$

$$\text{II. } \log_{10} \left(\frac{1}{125} \right)^{20} = 20 \log_{10} \frac{8}{1000} \quad \begin{matrix} 0.6990 \\ 60 \\ 41.94 \end{matrix} \\ = 20 (3 \log_{10} 2 - 3) \\ = 60 (0.3010 - 1) \\ = -41.94$$

$$-42 < \log_{10} \left(\frac{1}{125} \right)^{20} < -41 \text{ より}$$

$$10^{-42} < \left(\frac{1}{125} \right)^{20} < 10^{-41}$$

$$\text{よって } \left(\frac{1}{125} \right)^{20} \text{ は } 10^{-42} \text{ より } 10^{-41} \text{ までの間にあり、桁数は } 42 \text{ 桁}$$

$$-42 < \log_{10} \left(\frac{1}{125} \right)^{20} < -42 + 0.3010 + 1$$

$$1 \cdot 10^{-42} < \left(\frac{1}{125} \right)^{20} < 2 \cdot 10^{-42}$$

$$\text{よって } \left(\frac{1}{125} \right)^{20} \text{ は } 10^{-42} \text{ より } 2 \cdot 10^{-42} \text{ までの間にあり、桁数は } 42 \text{ 桁}$$

<point>

1. 桁数の求め方

2. 桁数の求め方の注意

8

$$\text{I. } \log_{10} 2^{148} = 148 \log_{10} 2$$

$$> 148 \cdot 0.3010 = 44.548$$

$$44.3010 < \log_{10} 2^{148} < 45 \text{ より}$$

$$20 \cdot 10^{43} < 2^{148} < 100 \cdot 10^{43}$$

$$2^{148} \text{ の } 1 \text{ の位の数は } 2, 4, 8, 6, \dots \text{ とあり、} \\ \text{したがって } 2^{148} \text{ は } 10^{43} \text{ より } 10^{44} \text{ までの間にあり、桁数は } 44 \text{ 桁}$$

$$20 \cdot 10^{43} < 2^{148} < 100 \cdot 10^{43}$$

$$\frac{20}{17} \cdot 10^{43} < p < \frac{100}{17} \cdot 10^{43}$$

$$\text{よって } p \text{ は } 44 \text{ 桁の数である}$$

II.

$$\text{d) } \log_{10} 3^{53} = 53 \log_{10} 3$$

$$25 < \log_{10} 3^{53} < 26 \text{ より}$$

$$10^{25} < 3^{53} < 10^{26}$$

$$\text{よって } 3^{53} \text{ は } 26 \text{ 桁}$$

$$\text{e) } 25 < \log_{10} 3^{53} < 25.3010 \text{ より}$$

$$1 \cdot 10^{25} < 3^{53} < 2 \cdot 10^{25}$$

$$\text{よって } 3^{53} \text{ の桁数は } 26 \text{ 桁}$$

$$3^{53} \text{ の } 1 \text{ の位の数は } 1$$

$$3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \dots \text{ と循環するから}$$

$$3^{53} \text{ の } 1 \text{ の位の数は } 3$$

$$\text{g) } 2^m \text{ は } 26 \text{ 桁の数である}$$

$$10^{25} \leq 2^m < 10^{26}$$

$$25 \leq m \log_{10} 2 < 26 \\ 0.3010$$

$$\therefore 83 \dots \leq m < 86 \dots \therefore m = 84, 85, 86$$

$$m = 84 \text{ とする}$$

$$\log_{10} 2^{84} = 84 \log_{10} 2$$

$$25 < \log_{10} 2^{84} < 25.3010 \text{ より } 1 \cdot 10^{25} < 2^{84} < 2 \cdot 10^{25}$$

$$m = 85 \text{ とする}$$

$$25.4771 < \log_{10} 2^{85} < 26 \text{ より } 3 \cdot 10^{25} < 2^{85} < 10^{26}$$

$$|3^{53} - 2^{85}| < 10^{25}$$

$$|3^{53} - 2^m| > 10^{25} \text{ (} m \neq 84 \text{) 21)$$

$$\text{したがって } m \text{ は } 84$$

[9]

I. d) $\log_2 3 = \frac{n}{m}$ とし $\frac{n}{m}$ の既約分数と仮定する

$$2^{\frac{n}{m}} = 3$$

$$2^n = 3^m$$

偶数のべき乗と奇数のべき乗

よって 2^n は偶数、 3^m は奇数

2. $\log_2 3$ と $\log_3 2$ の小数部分が等しいと仮定する

$$\log_2 3 - \log_3 2 = N \quad (N: \text{整数})$$

$$\therefore \log_2 3 = \frac{N}{p-2}$$

と割り切れる

よって $2^{\frac{N}{p-2}} = 3$

3. $\log_2 3 = k$ とおくと $2^k = 3$

$2^{1.5}$ と 3 の大小関係は

$$2^2 < 3^2 \quad \therefore 2^{1.5} < 3$$

$2^{1.6}$ と 3 の

$$2^2 > 3^2 \quad \therefore 2^{1.6} > 3$$

よって $1.5 < k < 1.6$

$\log_2 3$ の小数部分は 0.5 より

II. $m = 3^n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\log_3 m = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素な自然数})$$

$$3^{\frac{p}{q}} = m$$

$$3^p = m^q$$

左辺は素因数分解は 3 のみである

右辺 3 以外の素因数分解をもち得る

よって $\log_3 m$ は無理数である

$m = 3^n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) のとき

$\log_3 m$ は有理数である

よって $\log_3 m$ は有理数である

$$2011 - 7 = \boxed{2004} \div 7$$

$$32 \cdot 3^6$$

Spine

1. $\log$ と有理数・無理数

[別解 I]

$$\log_3 m = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素な自然数})$$

$$3^{\frac{p}{q}} = m$$

$$3^p = m^q$$

$m = 3^n$ とおくと

これは $3^p = (3^n)^q$

$$3^p = 3^{nq}$$

$$\therefore p = nq$$

p と q は互いに素、 $p = 1$

よって $\log_3 m$ は有理数とはならず $m = 3^n$ のとき