

高3理系数学 発展問題演習 10. 体積(1)

1 [2010 東京工業大]

xyz 空間内の 3 つの部分集合

$$A = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y, z) \mid |y| \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y, z) \mid |z| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

の和集合 $A \cup B \cup C$ の体積を求めよ。

2 [1998 東京大]

xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる. 四角錐 $PABCD$ の $x^2 + y^2 \geq 1$ を満たす部分の体積を求めよ.

3 [2003 東京大]

xyz 空間において, 平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし,

点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を A とする.

次に, 平面 $z=0$ 上の点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を H , 平面 $z=1$ 上の点

$(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする. H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする.

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする.

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し, 平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく.

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする. $t = 1 - \cos \theta$ のとき, $S(t)$ を θ で表せ.

(2) C の体積 $\int_0^1 S(t) dt$ を求めよ.

4 [I. 2004 早稲田大 II. 2019 名古屋大]

中心 O , 半径 a の円を底面とし, 高さが a の直円錐がある.

点 O を通り, 底面と 45° の角度で交わる平面を P とする.

(1) この円錐を P で切るとき, その切り口の面積を求めよ.

(2) P はこの円錐を 2 つの部分に分けるが, そのうちの小さい方の体積を求めよ.

II. 正の整数 n に対し $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$ とする。

- (1) I_1 を求めよ。必要ならば $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$ を使ってよい。
- (2) $n \geq 3$ のとき, I_n を I_{n-2} と n で表せ。
- (3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。 D を底面とし, 点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。 C を平面 $x = \frac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき, 小さい方を S とする。 z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

□ [東京大]

放物線 $y = \frac{3}{4} - x^2$ を y 軸のまわりに回転して得られる曲面 K を, 原点を通り回転軸と 45° の角をなす平面 H で切る。曲面 K と平面 H で囲まれた立体の体積を求めよ。

□ [東京理科大]

xyz 空間において yz 平面上の曲線 $y^2 - \frac{z^2}{2} = 1$ を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転面 Q と 2 平面 $z = y + 1$ および $z = y - 1$ によって囲まれる立体図形を K とする。

- (1) 回転面 Q 上の点を $P(x, y, z)$ とするとき, $x^2 + y^2$ を z で表せ。
- (2) 平面 $z = y + t$ ($-1 \leq t \leq 1$) を α とし, 回転面 Q の方程式と平面 α の方程式から z を消去することによって, 平面 α による K の切り口の xy 平面上への正射影の周の方程式および正射影の面積を求めよ。
- (3) 平面 α による K の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (4) K の体積 V を求めよ。

高3理系数学 発展問題演習 10. 体積(1)

7 [2012 東京慈恵会医科大]

n を 3 以上の整数とする。 xyz 空間の平面 $z=0$ 上に、1 辺の長さが 4 の正 n 角形 P があり、 P の外接円の中心を G とおく。半径 1 の球 B の中心が P の辺に沿って 1 周するとき、 B が通過してできる立体を K_n とする。

- (1) P の隣り合う 2 つの頂点 P_1, P_2 をとる。 G から辺 P_1P_2 に下ろした垂線と P_1P_2 との交点を Q とするとき、 $GQ > 1$ となることを示せ。
- (2) (ア) K_n を平面 $z=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときの断面積 $S(t)$ を t と n を用いて表せ。
(イ) K_n の体積 $V(n)$ を n を用いて表せ。
- (3) G を通り、平面 $z=0$ に垂直な直線を ℓ とする。 K_n を ℓ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $W(n)$ を n を用いて表せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(n)}{W(n)}$ を求めよ。

8 [2020 岡山大]

xyz 空間における $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 1)$, $G(0, 1, 1)$ を頂点とする立方体を考える。点 P は時刻 $t=0$ に原点 O を出発し、毎秒 1 の速さで正方形 $OABC$ の周上を点 O , 点 A , 点 B , 点 C の順に一周する。点 Q は時刻 $t=0$ に点 D を出発し、毎秒 1 の速さで正方形 $DEFG$ の周上を点 D , 点 G , 点 F , 点 E の順に一周する。線分 PQ が通過してできる図形と正方形 $OABC$, 正方形 $DEFG$ によって囲まれる立体を K とする。

- (1) a は $0 \leq a < \frac{1}{2}$ を満たすとする。平面 $z=a$ によって立体 K を切ったときの切り口の面積を求めよ。
- (2) 立体 K の体積を求めよ。

9 [2007 北海道大]

xyz 空間において、連立不等式

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 1 \geq 0$$

の表す立体を考える。

- (1) この立体を平面 $z=t$ で切ったときの断面を xy 平面に図示し、この断面の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (2) この立体の体積を求めよ。