

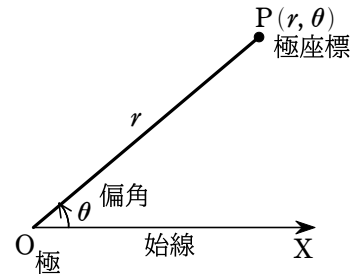
4.5 極座標

(1) 極座標

これまで平面上の点の座標は x 座標と y 座標の組 (x, y) で表してきた。ここでは、平面上の点の座標の別な表し方について考える。

平面上に点 O と半直線 OX を定めると、この平面上の任意の点 P の位置は、 OP の長さ r と、 OX から半直線 OP へ測った角 θ で決まる。

このとき、2つの数の組 (r, θ) を点 P の極座標といい、点 O を極、半直線 OX を始線、角 θ を偏角という。



極 O の極座標は、 θ を任意の数として $(0, \theta)$ と定める。

なお、 θ は弧度法で表した一般角である。

極座標が与えられると、その点はただ1つに定まる。

逆に、ある1つの点を与えられたとき、その点の極座標は1通りには定まらない。

例えば、 $\frac{\pi}{3}, \frac{7}{3}\pi, -\frac{5}{3}\pi$ などの角の動径は一致するから、極座標が

$$\left(2, \frac{\pi}{3}\right), \left(2, \frac{7}{3}\pi\right), \left(2, -\frac{5}{3}\pi\right)$$

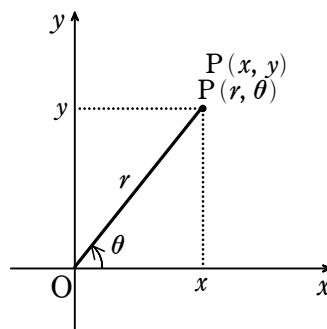
である点と同じ点を表す。

一般に、極座標では、 n を整数とするとき、 (r, θ) と $(r, \theta + 2n\pi)$ は同じ点を表すから、ある点 P の極座標は1通りには定まらない。

しかし、極 O と異なる点 P の極座標 (r, θ) は、例えば、 θ の値の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ と制限すると、ただ1通りに定まる。

(2) 極座標と直交座標の関係

極座標に対し、これまで用いてきた x 座標, y 座標の組 (x, y) で表した座標を直交座標という。座標平面において極座標を考える場合、ふつう、原点 O を極, x 軸の正の部分の始線とする。
この場合、点 P の極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の間には、次の関係がある。



極座標と直交座標

$$1. x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$2. r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \neq 0 \text{ のとき } \cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r}$$

例1

直交座標の原点 O を極とし, x 軸の正の部分の始線とする極座標 (r, θ) を考える。この極座標で表された3点を $A\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$ とする。

- (1) 点 A の直交座標を求めよ。
- (2) $\angle OAB$ を求めよ。
- (3) $\triangle OBC$ の面積を求めよ。
- (4) $\triangle ABC$ の外接円の中心と半径を求めよ。ただし、中心は直交座標で表せ。

解説

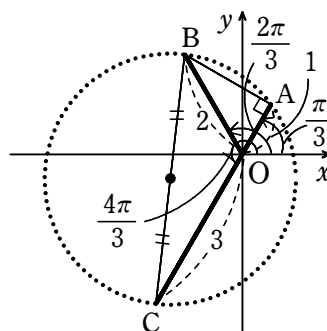
- (1) 点 A の直交座標は

$$\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(2) \angle AOB = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

また, $OA : OB = 1 : 2$ より, $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$

$$(3) \angle BOC = \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



よって、 $\triangle OBC$ の面積は

$$\frac{1}{2}OB \cdot OC \sin \angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(4) \angle AOB + \angle BOC = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi \text{ より}$$

3点 A, O, Cはこの順に一直線上にある

また、 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ であるから、 $\triangle ABC$ は $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形

であり、その外接円の中心は、線分 BC の中点である

点 B, C の直交座標は、それぞれ

$$B\left(2\cos\frac{2\pi}{3}, 2\sin\frac{2\pi}{3}\right), \quad C\left(3\cos\frac{4\pi}{3}, 3\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\therefore B(-1, \sqrt{3}), \quad C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって、外接円の中心は

$$\left(\frac{(-1) + \left(-\frac{3}{2}\right)}{2}, \frac{\sqrt{3} + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{2}\right) = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

また、外接円の半径は

$$\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{-1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^2 + \left\{\sqrt{3} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

(3) 極方程式

ある曲線が極座標 (r, θ) に関する方程式 $r = f(\theta)$ や $F(r, \theta) = 0$ で表されるとき、この方程式を曲線の極方程式という。

例2

(1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の極方程式を求めよ。

(2) 直線 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ の極方程式を余弦を用いて表せ。

(3) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ の交点の極座標 (r, θ) を求めよ。

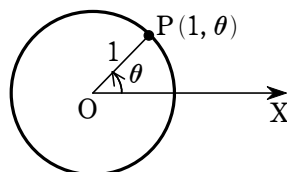
解説

(1) 円上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$r = 1, \quad \theta \text{ は任意の値}$$

よって、この円の極方程式は

$$r = 1 \dots \textcircled{1}$$



別解

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ より}$$

$$r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1$$

$$r^2 = 1$$

よって, $r = 1$ ($r = -1$ でもよい)

極方程式においては, $r < 0$ の極座標の点も考えます。すなわち, $r > 0$ のとき, 極座標が $(-r, \theta)$ である点は, 極座標が $(r, \theta + \pi)$ である点と考える。

例えば, $(-1, \theta)$ と $(1, \theta + \pi)$ は同じ点を表し, この点は点 $(1, \theta)$ と極 O に関して対称である。

$$(2) l: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \text{ とする}$$

点 O から直線 l に垂線を下ろし,

$$\text{その足を } H \text{ とすると, } H\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$$

直線 l 上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$OP \cos \angle HOP = OA$$

$$r \cos \left| \theta - \frac{\pi}{6} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots \textcircled{2}$$

別解

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ より}$$

$$r \sin \theta = -\sqrt{3} r \cos \theta + \sqrt{3}$$

$$r(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta) = \sqrt{3}$$

$$\therefore 2r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \text{ (cos の合成)}$$

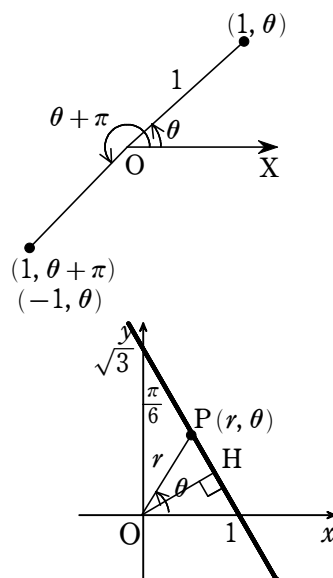
(3) ①, ②より

$$\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi \text{ より}$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \quad \therefore \theta = 0, \frac{\pi}{3}$$

よって, $(r, \theta) = (1, 0), \left(1, \frac{\pi}{3}\right)$



例3

曲線 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ を表す極方程式を求めよ。

解説

曲線 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ は右図のようになる

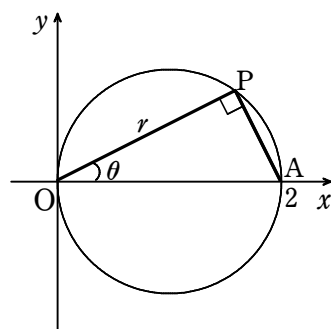
原点を O ，点 $(2, 0)$ を A とする

円上の点 P の極座標を (r, θ) とすると，

$$OP = OA \cos \theta$$

よって，求める極方程式は

$$r = 2 \cos \theta$$



別解

$x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ より

$$(r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta)^2 = 1$$

$$r^2 - 2r \cos \theta = 0$$

$$r(r - 2 \cos \theta) = 0$$

$$\therefore r = 0 \text{ または } r = 2 \cos \theta$$

$r = 0$ は極を表し，

$r = 2 \cos \theta$ は極座標が $(1, 0)$ である点を中心とする半径 1 の円を表し，この円は極を通るから，

$$r = 2 \cos \theta$$

例4

次の極方程式を直角座標の x ， y の方程式で表せ。必要であれば， x の範囲も書け。

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}$

(2) $r \sin \theta = -2$

(3) $r = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$

解説

(1) $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$

(2) $r \sin \theta = y$ より， $y = -2$

(3) $r = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ の両辺に r を掛けると

$$r^2 = r \cos \theta + \sqrt{3} r \sin \theta$$

$r^2 = x^2 + y^2$ ， $r \cos \theta = x$ ， $r \sin \theta = y$ より

$$x^2 + y^2 = x + \sqrt{3} y$$

$$\therefore x^2 + y^2 - x - \sqrt{3} y = 0$$

例5

座標平面において、極方程式 $r=2\cos\theta$ で表される曲線を C とし、 C 上において極座標が $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, $(2, 0)$ である点をそれぞれ A , B とする。また、 A , B を通る直線を ℓ とし、 A を中心とし、線分 AB を半径にもつ円を D とする。

(1) 曲線 C は直交座標において点 $(^{\text{ア}}\square, ^{\text{イ}}\square)$ を中心とし、半径が $^{\text{ウ}}\square$ の円を表す。

(2) 直線 ℓ の極方程式は $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{\text{エ}}\square\right) = \sqrt{^{\text{オ}}\square}$ である。

(3) 円 D の極方程式は $r = ^{\text{カ}}\square \sqrt{^{\text{キ}}\square} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{^{\text{ク}}\square}\right)$ である。

解説

(1) $r=2\cos\theta$ より

$$r^2 = 2r\cos\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r\cos\theta = x \quad \text{より}$$

$$x^2 + y^2 = 2x \quad \therefore (x-1)^2 + y^2 = 1$$

よって、曲線 C は直交座標において点 $(^{\text{ア}}1, ^{\text{イ}}0)$ を中心とし、半径が $^{\text{ウ}}1$ の円を表す

(2) 線分 OB は円 C の直径より、 $OA \perp AB$

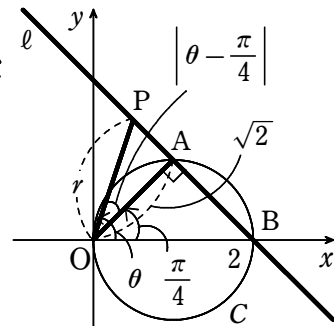
よって、直線 ℓ は、点 A を通り OA に垂直な直線である

直線 ℓ 上の点 P の極座標を (r, θ) とすると、

$$OA = OP \cos \angle POA$$

$$\sqrt{2} = r \cos \left| \theta - \frac{\pi}{4} \right|$$

$$\therefore r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{\text{エ}4} \right) = \sqrt{^{\text{オ}}2}$$



(3) 円 D 上の点 Q の極座標を (r, θ) とする

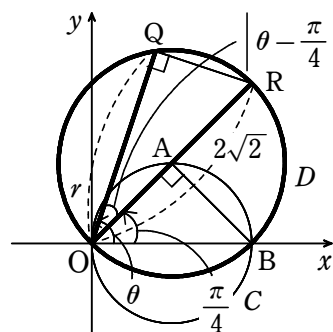
$AB=OA=\sqrt{2}$ であるから、

極座標が $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ である点を R とすると、

直角三角形 OQR において

$$OQ = OR \cos \angle QOR$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$



別解 x, y の方程式を極方程式に直す

(4) 2次曲線の極方程式

極座標が $(a, 0)$ である点 A を通り、始線 OX に垂直な直線を l とする。
点 P から l に下ろした垂線を PH とするとき、離心率

$$e = \frac{OP}{PH}$$

の値が一定であるような点 P の軌跡は、2次曲線になる。

その2次曲線の極方程式を求める。

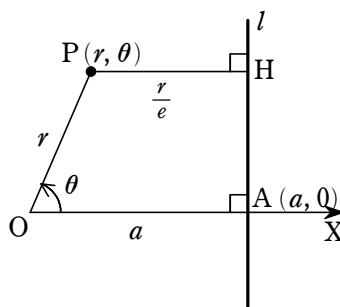
右の図において、点 P を2次曲線上の点
とし、その極座標を (r, θ) とすると、
 $OP=r$ より

$$PH = \frac{r}{e}$$

また、 $PH = a - r \cos \theta$ より

$$\frac{r}{e} = a - r \cos \theta$$

$$\therefore r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$



一般に、2次曲線の極方程式は、 $\textcircled{1}$ の式で与えられる。

2次曲線の極方程式 $\textcircled{1}$ において、次のことが成り立つ。

$0 < e < 1$ のとき $\textcircled{1}$ は O を焦点の1つとする楕円を表す。

$e = 1$ のとき $\textcircled{1}$ は O を焦点、 l を準線とする放物線を表す。

$e > 1$ のとき $\textcircled{1}$ は O を焦点の1つとする双曲線を表す。

例6

平面上の点の極座標を (r, θ) とする. 方程式 $r = \frac{1}{1 + a \cos \theta}$ について

- (1) この方程式は $a = \pm 1$ ならば放物線, $|a| < 1$ ならば楕円を表すことを示せ.
 (2) 上の方程式が表す曲線と y 軸は a の値に関係なく $y = \pm 1$ で交わることを示せ.

解説

$$r = \frac{1}{1 + a \cos \theta} \text{ より}$$

$$r = 1 - a \cos \theta$$

$$|a| \leq 1 \text{ のとき, } |a \cos \theta| \leq 1 \text{ より, } r > 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - ax$$

$$x^2 + y^2 = (1 - ax)^2 = 1 - 2ax + a^2 x^2$$

$$(1 - a^2)x^2 + 2ax + y^2 = 1 \dots \textcircled{1}$$

$$a = \pm 1 \text{ ならば, } \pm 2x + y^2 = 1 \text{ (放物線)}$$

$$|a| < 1 \text{ ならば, } \left(x + \frac{a}{1 - a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{1 - a^2})^2} = \frac{1}{(1 - a^2)^2} \text{ (楕円)}$$

$$(2) x = 0 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ より, } a \text{ の値に関係なく } y^2 = 1$$

$$\text{よって, } y = \pm 1$$

例7

楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上の 2 点 P, Q が $\angle POQ = 90^\circ$ を満たしながら動くとき, 次の問いに答えよ. ただし, O は原点である.

- (1) $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$ の値は一定であることを示せ.
 (2) O から線分 PQ に下ろした垂線の足を R とする. 線分 OR の長さは一定であることを示せ.

解説

(1) $OP=r_1$, $OQ=r_2$ とし, 動径 OP , OQ の表す角をそれぞれ θ_1 , θ_2 とする

$\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ より, $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$ として考えれ

ばよい

$$\cos \theta_2 = \cos(\theta_1 + 90^\circ) = -\sin \theta_1,$$

$$\sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + 90^\circ) = \cos \theta_1 \text{ より}$$

$P(r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1)$, $Q(-r_2 \sin \theta_1, r_2 \cos \theta_1)$ とおける

2 点 P , Q は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上にあるから

$$\frac{r_1^2 \cos^2 \theta_1}{9} + \frac{r_1^2 \sin^2 \theta_1}{4} = 1, \quad \frac{r_2^2 \sin^2 \theta_1}{9} + \frac{r_2^2 \cos^2 \theta_1}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{r_1^2} = \frac{\cos^2 \theta_1}{9} + \frac{\sin^2 \theta_1}{4}, \quad \frac{1}{r_2^2} = \frac{\sin^2 \theta_1}{9} + \frac{\cos^2 \theta_1}{4}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1}{9} + \frac{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1}{4} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} \text{ (一定)} \end{aligned}$$

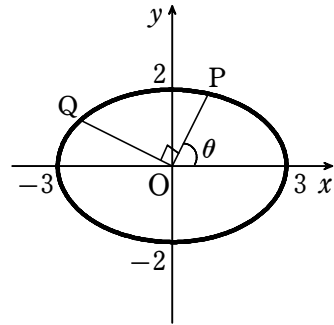
(2) $\triangle OPQ$ の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} OP \cdot OQ = \frac{1}{2} PQ \cdot OR \text{ より}$$

$$\frac{1}{OR} = \frac{PQ}{OP \cdot OQ}$$

$$\frac{1}{OR^2} = \frac{PQ^2}{OP^2 \cdot OQ^2} = \frac{OP^2 + OQ^2}{OP^2 \cdot OQ^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{13}{36}$$

$$\therefore OR^2 = \frac{36}{13} \quad \therefore OR = \frac{6}{\sqrt{13}} \text{ (一定)}$$



(5) いろいろな極方程式

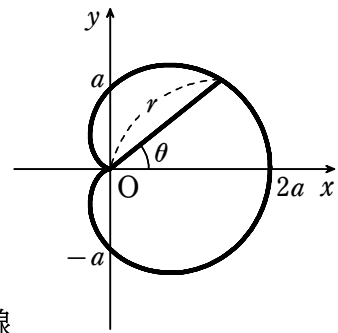
カージオイド(心臓形)やレムニスケート(連珠形)は, 直交座標より極座標で表した方が単純な形で表すことができる。

例8

$a > 0$ を定数として、極方程式 $r = a(1 + \cos \theta)$ により表される曲線 C_a を考える.

次の問いに答えよ.

- (1) 極座標が $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ の点を中心とし半径が $\frac{a}{2}$ である円 S を、極方程式で表せ.



- (2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $P \neq O$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき、線分 PQ の長さは一定であることを示せ.

- (3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき、極座標が $(2a, 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ.

解説

(1) $r = 2 \cdot \frac{a}{2} \cos \theta \quad \therefore r = a \cos \theta$

- (2) 点 O, P, Q は一直線上にあるから、点 P の極座標を (r_1, θ) とおくと、点 Q の極座標は (r_2, θ) または $(r_2, \theta + \pi)$ と表せる

$Q(r_2, \theta)$ のとき

$r_2 = a \cos \theta$ より

$PQ = r_1 - r_2 = a(1 + \cos \theta) - a \cos \theta = a$

$Q(r_2, \theta + \pi)$ のとき

$r_2 = a \cos(\theta + \pi) = -a \cos \theta$ より

$PQ = r_1 + r_2 = a(1 + \cos \theta) - a \cos \theta = a$

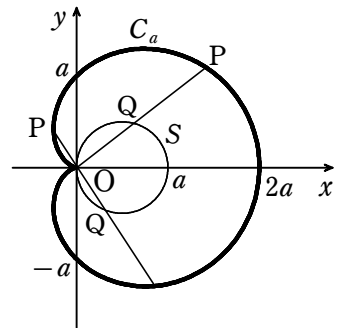
よって、線分 PQ の長さは一定である

- (3) C_a は x 軸対称であるから、 $0 \leq \theta \leq \pi$ で考えて

$B(2a, 0), P(r, \theta)$ とすると

$\triangle OBP$ で余弦定理より ($0 < \theta < \pi$ のとき)

$$\begin{aligned} BP^2 &= a^2(1 + \cos \theta)^2 + 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a(1 + \cos \theta) \cdot \cos \theta \\ &= a^2 \{ (1 + \cos \theta)^2 + 4 - 4(1 + \cos \theta) \cdot \cos \theta \} \\ &= a^2 (-3\cos^2 \theta - 2\cos \theta + 5) \quad (\theta = 0, \pi \text{ のときも成り立つ}) \\ &= a^2 \left\{ -3 \left(\cos \theta + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{16}{3} \right\} \end{aligned}$$



$\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のとき, BP^2 は最大

よって, BP の最大値は $\sqrt{\frac{16}{3}a^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$

別解

$B(2a, 0)$, $P(r, \theta)$ とすると, B, P の直交座標は

$B(2a, 0)$, $P(r\cos \theta, r\sin \theta)$, $r = a(1 + \cos \theta)$ より

$$\begin{aligned} BP^2 &= (r\cos \theta - 2a)^2 + (r\sin \theta)^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar\cos \theta \\ &= 4a^2 + a^2(1 + \cos \theta)^2 - 4a^2\cos \theta(1 + \cos \theta) = -3a^2\cos^2 \theta - 2a^2\cos \theta + 5a^2 \\ &= a^2(-3\cos^2 \theta - 2\cos \theta + 5) = a^2\left\{-3\left(\cos \theta + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}\right\} \end{aligned}$$

として考えてもよい。

注 C_a をカージオイド(心臓形)という。

例9

長さ 2 の線分 OA を直径とする円の任意の接線に, O から下ろした垂線とその接線との交点を P とする. O を極, 半直線 OA を始線としたときの点 P の軌跡の極方程式を求めよ。

解説

円の中心を C , 接点を Q とし, 点 $P(r, \theta)$

とおく

中心 C から直線 OP に下ろした垂線の足を

H とすると

$$OC=1, HP=CQ=1$$

(i) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

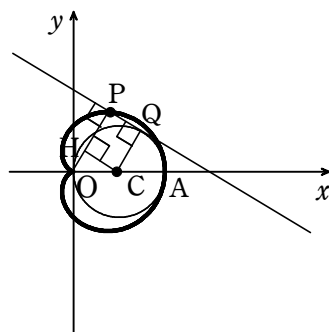
$\angle COH = \theta$, $OH = \cos \theta$ より

$$OP = 1 + OH = 1 + \cos \theta \quad \therefore r = 1 + \cos \theta$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ のとき

$\angle COH = \pi - \theta$, $OH = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ より

$$OP = 1 - OH = 1 + \cos \theta \quad \therefore r = 1 + \cos \theta$$



(iii) $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のとき

P の描く曲線は始線に関して対称であり、

$1 + \cos(2\pi - \theta) = 1 + \cos \theta$ であるから、

$r = 1 + \cos \theta$ とすれば、点 (r, θ) が曲線上にあれば、それと始線に関して対称な点 $(r, 2\pi - \theta)$ も曲線上にあるので、

求める軌跡の極方程式は $r = 1 + \cos \theta$

[注] P の軌跡はカージオイドである。定点からある曲線の任意の接線に垂線を下ろしたときの垂線の足の軌跡を垂足曲線という。カージオイドは垂足曲線の一つである。

例10

xy 座標平面に 2 点 $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ ($a > 0$) が与えられているとき

(1) この座標平面において、 $PA \cdot PB = a^2$ を満たす点 P の軌跡の極方程式 $r = f(\theta)$ を求めよ。

(2) (1) で求めた関数 $r = f(\theta)$ の増減、凹凸を調べることにより、横軸を θ 、縦軸を r とする座標平面に、式 $r = f(\theta)$ が表す曲線の概形を描け。ただし、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$ とする。

(3) (1) で求めた軌跡は、 xy 座標平面において、不等式 $x^2 + y^2 \leq 2a^2$, $|y| \leq |x|$ の表す領域に含まれることを示せ。また、この領域の中に、(1) で求めた軌跡の概形を描け。

(解説)

(1) $P(r, \theta)$ とすると、余弦定理より

$$PA^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta$$

$$PB^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\pi - \theta) = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta$$

$PA^2 \cdot PB^2 = a^4$ より

$$(r^2 + a^2)^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \theta = a^4$$

$$r^4 + 2a^2 r^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \theta = 0$$

$r^2 \neq 0$ より

$$r^2 = 2a^2(2\cos^2 \theta - 1) = 2a^2 \cos 2\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore r = \sqrt{2} a \sqrt{\cos 2\theta} \quad (r > 0 \text{ とする})$$

$$(2) r' = \frac{-\sqrt{2} a \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$r'' = \frac{-\sqrt{2} a \left(2\cos 2\theta \sqrt{\cos 2\theta} - \sin 2\theta \cdot \frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}} \right)}{\cos 2\theta} = \frac{-\sqrt{2} a (\cos^2 2\theta + 1)}{\cos 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}} \leq 0$$

ここで、①より、 $\cos 2\theta \geq 0$ であるから、 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$

θ	$-\frac{\pi}{4}$	...	0	...	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	...	π	...	$\frac{5}{4}\pi$
r'	∞	+	0	-	$-\infty$	∞	+	0	-	$-\infty$
r''		-	-	-			-	-	-	
r	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}a$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}a$	$\searrow$	0

よって、 $r = f(\theta)$ が表す曲線の概形は、下の左図

(3) ①より、 $r^2 \leq 2a^2$ 、すなわち $x^2 + y^2 \leq 2a^2$

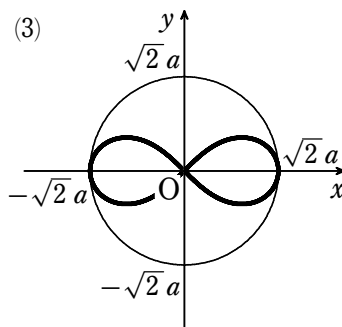
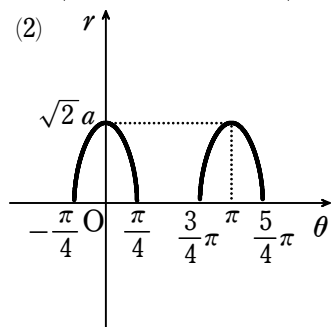
また、①から、 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \geq 0$ より

$$\frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 \geq 0 \quad \therefore |y| \leq |x|$$

①で θ を $-\theta$ や $\pi - \theta$ に変えても変わらないから、

グラフは x 軸対称かつ y 軸対称

よって、軌跡の概形は、下の右図



〔注〕 $PA \cdot PB = a^2$ を満たす点 P の軌跡をレムニスケート(連珠形)という。

例11

xy 座標において、双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ における C の接線に対して、原点 O から下ろした垂線の足を点 Q とする。

- (1) 点 Q の x, y 座標を a, b を用いて表せ。
- (2) 原点 O を極、半直線 Ox を始線とする極座標において、双曲線 C の極方程式を求めよ。
- (3) 点 P が双曲線 C 上を動くとき、点 Q が描く軌跡の極方程式を求めよ。
- (4) 点 A, B の xy 座標をそれぞれ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ とする。点 A から点 Q までの距離 AQ と、点 B から点 Q までの距離 BQ との積 $AQ \cdot BQ$ は、点 P のとり方によらず一定であることを示せ。

解説

- (1) C 上の点 $P(a, b)$ における接線の方程式は

$$ax - by = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

O を通り、直線 $\textcircled{1}$ に垂直な直線の方程式は

$$bx + ay = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times a + \textcircled{2} \times b$ より

$$(a^2 + b^2)x = a \quad \therefore x = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

よって、 $Q\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$

- (2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ より

$$r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1$$

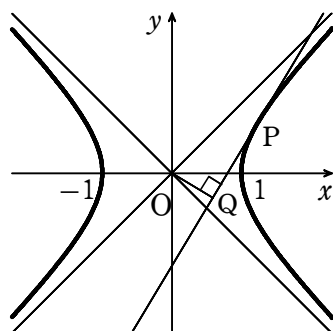
$$\therefore r^2 \cos 2\theta = 1$$

- (3) $x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ とおくと

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2} \quad \text{であるから,} \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{より}$$

$$a = (a^2 + b^2)x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = -(a^2 + b^2)y = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

点 P は C 上にあるから、 $a^2 - b^2 = 1$ より



$$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \text{ より}$$

$$r^2 \cos 2\theta = r^4$$

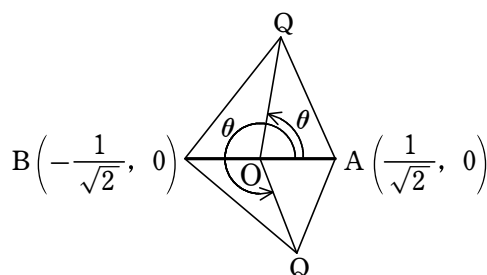
$$r \neq 0 \text{ より, } r^2 = \cos 2\theta \quad (r \neq 0)$$

(4) 点 Q の極座標を (r, θ) とおく

(i) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} AQ^2 &= r^2 + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ &= r^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} r \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BQ^2 &= r^2 + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{r}{\sqrt{2}} \cos(\pi - \theta) \\ &= r^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} r \cos \theta \end{aligned}$$



よって

$$\begin{aligned} AQ^2 \cdot BQ^2 &= \left(r^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - 2r^2 \cos^2 \theta \\ &= r^4 + r^2 + \frac{1}{4} - r^2(1 + \cos 2\theta) \end{aligned}$$

$$r^2 = \cos 2\theta \text{ より, } AQ^2 \cdot BQ^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore AQ \cdot BQ = \frac{1}{2} \text{ (一定)}$$

(ii) $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のとき

$$\begin{aligned} AQ^2 &= r^2 + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{r}{\sqrt{2}} \cos(2\pi - \theta) = r^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} r \cos \theta \\ BQ^2 &= r^2 + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{r}{\sqrt{2}} \cos(\theta - \pi) = r^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} r \cos \theta \end{aligned}$$

$$(i) \text{と同様に, } AQ \cdot BQ = \frac{1}{2}$$

$$(i), (ii) \text{より, } AQ \cdot BQ = \frac{1}{2}$$

☞ Q の軌跡はレムニスケートである。レムニスケートも垂足曲線である。

補1

(1) 直交座標において、点 $A(\sqrt{3}, 0)$ と準線 $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ からの距離の比が $\sqrt{3} : 2$ である点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。

(2) (1) における A を極、 x 軸の正の部分の半直線 AX とのなす角 θ を偏角とする極座標を定める。このとき、 P の軌跡を $r = f(\theta)$ の形の極方程式で求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi, r > 0$ とする。

(3) A を通る任意の直線と (1) で求めた曲線との交点を R, Q とする。

このとき $\frac{1}{RA} + \frac{1}{QA}$ は一定であることを示せ。

解説

(1) P から準線へ下ろした垂線の足を H とする

$2PA = \sqrt{3} PH \dots \textcircled{1}$ より

$$2\sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + y^2} = \sqrt{3} \left| \frac{4}{\sqrt{3}} - x \right|$$

$$4(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2) = 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 16$$

よって、楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 準線と x 軸との交点を M とする

$$PA = r, PH = AM - AP \cos \theta = \frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} - r \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} - r \cos \theta$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$2r = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - r \cos \theta \right) = 1 - \sqrt{3} r \cos \theta$$

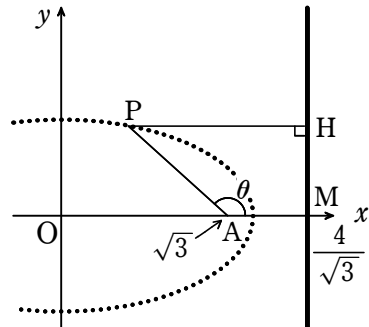
$$(2 + \sqrt{3} \cos \theta) r = 1 \quad \therefore r = \frac{1}{2 + \sqrt{3} \cos \theta}$$

(3) R, Q の極座標を、それぞれ $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ とする

$\theta_2 = \theta_1 + \pi$ であるから、

$$RA = r_1 = \frac{1}{2 + \sqrt{3} \cos \theta_1}, QA = r_2 = \frac{1}{2 + \sqrt{3} \cos \theta_2} = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos \theta_1} \text{ より}$$

$$\frac{1}{RA} + \frac{1}{QA} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = (2 + \sqrt{3} \cos \theta_1) + (2 - \sqrt{3} \cos \theta_1) = 4 \text{ (一定)}$$



補2

放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 上に 4 点があり、それらを y 座標の大きい順に A, B, C, D とする。線分 AC と BD は放物線の焦点 F で垂直に交わっている。ベクトル $\overrightarrow{FA}$ が x 軸の正の方向となす角を θ とする。

(1) 線分 AF の長さを p と θ を用いて表せ。

(2) $\frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF}$ は θ によらず一定であることを示し、その値を p を用いて表せ。

(解説)

(1) 4 点 A, B, C, D の位置関係は右図
点 A の x 座標を a とすると、
放物線の定義より

$$AF = a - (-p) = a + p$$

$$\therefore a = AF - p \cdots (1)$$

このとき、 $\cos \theta = \frac{a-p}{AF}$ より

$$\cos \theta = \frac{(AF - p) - p}{AF} = \frac{AF - 2p}{AF}$$

$$\therefore AF = \frac{2p}{1 - \cos \theta} \quad (1 - \cos \theta \neq 0)$$

(2) (1) と同様にして

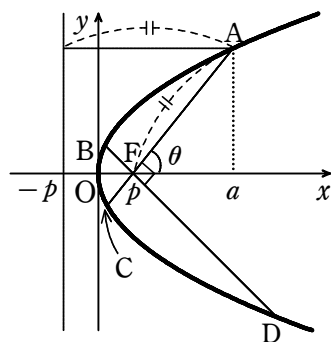
$$BF = \frac{2p}{1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2p}{1 + \sin \theta},$$

$$CF = \frac{2p}{1 - \cos(\theta + \pi)} = \frac{2p}{1 + \cos \theta},$$

$$DF = \frac{2p}{1 - \cos\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right)} = \frac{2p}{1 - \sin \theta}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF} &= \frac{1}{4p^2} \{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) + (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)\} \\ &= \frac{1}{4p^2} (1 - \cos^2 \theta + 1 - \sin^2 \theta) = \frac{1}{4p^2} \quad (\text{一定}) \end{aligned}$$



補3

a, h を正の定数とする。 xy 平面上の原点 $O(0, 0)$ からの距離と直線 $x = -a$ からの距離の比が $h:1$ である点 P の軌跡を C とする。

- (1) 点 P の極座標を (r, θ) とするとき、軌跡 C を極方程式で表せ。
- (2) C 上の4点 Q, R, S, T を考える。線分 QR と ST が原点で直交しているとき、 $\frac{1}{QR} + \frac{1}{ST}$ の値が4点の選び方によらず一定となることを示せ。
- (3) $0 < h < 1$ のとき、 C を x と y の方程式で表せ。また、 C がどのような図形となるか述べよ。

解説

- (1) 点 P の極座標を (r, θ) とするとき、 $OP = r$
 また、点 P から直線 $x = -a$ に下ろした垂線を PH とすると

$$PH = r \cos \theta + a$$

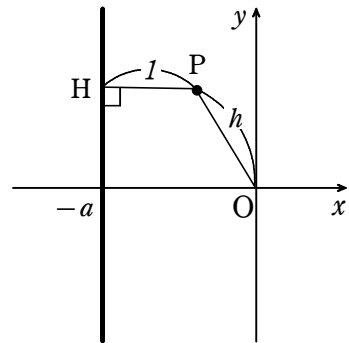
$OP : PH = h : 1$ から、 $OP = hPH$ より

$$r = h(r \cos \theta + a)$$

$$r(1 - h \cos \theta) = ha$$

$h > 0, a > 0$ のとき、右辺は正であるから

$$1 - h \cos \theta \neq 0 \quad \therefore r = \frac{ha}{1 - h \cos \theta}$$



参考

点 P が直線 $x = -a$ よりも左側にあるときは $PH = -r \cos \theta - a$ より

$$r = \frac{-ha}{1 + h \cos \theta} \text{ となる}$$

しかし、極方程式では、 $r > 0$ のとき極座標が $(-r, \theta)$ である点は、極座標が $(r, \theta + \pi)$ である点と考えるから、この場合も、 $\theta' = \theta + \pi$ の偏角に対して

$$r = -\frac{-ha}{1 + h \cos(\theta' - \pi)} = \frac{ha}{1 - h \cos \theta'}$$

という形で表される

(2) 右図のように 4 点 Q, S, R, T があるとしても一般性を失わない

点 Q の極座標を, $Q\left(\frac{ha}{1-h\cos\theta}, \theta\right)$ とおく

このとき

$$S\left(\frac{ha}{1+h\sin\theta}, \theta + \frac{\pi}{2}\right), R\left(\frac{ha}{1+h\cos\theta}, \theta + \pi\right)$$

$$T\left(\frac{ha}{1-h\sin\theta}, \theta + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ より}$$

$$QR = \frac{ha}{1-h\cos\theta} + \frac{ha}{1+h\cos\theta} = \frac{2ha}{1-h^2\cos^2\theta}$$

$$ST = \frac{ha}{1+h\sin\theta} + \frac{ha}{1-h\sin\theta} = \frac{2ha}{1-h^2\sin^2\theta}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{QR} + \frac{1}{ST} &= \frac{1-h^2\cos^2\theta}{2ha} + \frac{1-h^2\sin^2\theta}{2ha} \\ &= \frac{2-h^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{2ha} = \frac{2-h^2}{2ha} \end{aligned}$$

よって, $\frac{1}{QR} + \frac{1}{ST}$ の値は 4 点の選び方によらず一定である

(3) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおく

$$r=h(r\cos\theta+a) \text{ の両辺を 2 乗すると, } r^2=h^2(r\cos\theta+a)^2$$

$$x^2+y^2=r^2, \quad x=r\cos\theta \text{ より}$$

$$x^2+y^2=h^2(x+a)^2$$

よって, $0 < h < 1$ のとき

$$(1-h^2)\left(x-\frac{ah^2}{1-h^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2h^2}{1-h^2}$$

$$\therefore \frac{\left(x-\frac{ah^2}{1-h^2}\right)^2}{\left(\frac{ah}{1-h^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ah}{\sqrt{1-h^2}}\right)^2} = 1$$

したがって, C が表す図形は楕円である

