

1.2 積分の基本(2)

(1) $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の積分

合成関数の微分法により

$$\{\log|g(x)|\}' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

となるから、次の公式が成り立つ。

$\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$$

例1

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{2x^3}{1+x^2} dx$$

$$(3) \int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$$

$$(4) \int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1} dx$$

$$(5) \int_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}}$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log|x^2-2x+2| \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\log 2 - \log 1) = \log \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{2x^3}{1+x^2} &= \frac{2x(x^2+1)-2x}{x^2+1} = 2x - \frac{2x}{x^2+1} \text{ より} \\ \int_0^1 \frac{2x^3}{1+x^2} dx &= \left[x^2 - \log(x^2+1) \right]_0^1 = 1 - \log 2 \end{aligned}$$

$$(3) \int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} dx = \log(1+\sin x) + C$$

$$(4) \int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1} dx = \int_1^2 \frac{(e^x-1)'}{e^x-1} dx = \left[\log|e^x-1| \right]_1^2 = \log(e+1)$$

$$(5) \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1} \text{ より}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \left[\log(e^x+1) \right]_0^1 = \log \frac{e+1}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\sin x)'}{\sin x}$$

であるから、次の公式が成り立つ。

$\tan x$ の不定積分

$$\int \tan x dx = -\log |\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \log |\sin x| + C$$

例2

定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ について、 I_1 , I_2 , I_3 を求めよ。

解説

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$= -\left[\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \tan^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (\tan x)' dx - I_1$$

$$= \left[\frac{1}{2} \tan^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$$

例3

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$ の値は である。

(解説)

$\tan^4 x$ は偶関数より

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \tan^2 x (\tan x)' - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \right\} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{ \tan^2 x (\tan x)' - (\tan x)' + 1 \} dx \\ &= 2 \left[\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(2) $f(x)g(x)$ の積分

$f(x)g(x)$ の積分を考える。

微分法には積の微分法があるが、積分法には積の積分法はない。そこで、 $f(x)g(x)$ の積分を求める方法の1つとして、積を和の形に直してから積分する方法がある。

例4

次の積分を計算せよ。

(1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x-3} dx$

(2) $\int \frac{x}{x^2-x-2} dx$

(3) $\int \frac{x^2}{x^2-1} dx$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \int_0^1 \frac{1}{(x-3)(x+1)} dx &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[\log|x-3| - \log|x+1| \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} \left[\log \left| \frac{x-3}{x+1} \right| \right]_0^1 = -\frac{1}{4} \log 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \frac{x}{x^2-x-2} &= \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} \quad \text{とおくと} \\
 x &= a(x-2) + b(x+1) \\
 x &= (a+b)x - 2a + b \\
 \therefore a+b &= 1, -2a+b=0 \quad \therefore a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{x^2-x-2} dx &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} (\log|x+1| + 2 \log|x-2|) + C \\
 &= \frac{1}{3} \log \{ |x+1| (x-2)^2 \} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
 (3) \frac{x^2}{x^2-1} &= 1 + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \quad \text{より} \\
 \int \frac{x^2}{x^2-1} dx &= \int \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \right\} dx \\
 &= x + \frac{1}{2} (\log|x-1| - \log|x+1|) + C \\
 &= x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

注 分数関数は、まず (分母の次数) > (分子の次数) となるように変形する。

例5

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx \quad (2) \int_0^1 \frac{x^2-13}{x^3-3x-2} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1} dx$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx \text{ (部分分数分解)} \\ &= \frac{1}{2} (\log|x| - 2\log|x+1| + \log|x+2|) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{|x(x+2)|}{(x+1)^2} + C \text{ (} C \text{ は積分定数)} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{x^2-13}{x^3-3x-2} = \frac{x^2-13}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-2} \text{ とおく}$$

a, b, c を求めると, $a=2, b=4, c=-1$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2-13}{x^3-3x-2} dx &= \int_0^1 \left\{ \frac{2}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-2} \right\} dx \\ &= \left[2\log|x+1| - \frac{4}{x+1} - \log|x-2| \right]_0^1 \\ &= 2\log 2 - 2 + 4 + \log 2 = 2 + 3\log 2 \end{aligned}$$

注 なぜ1行目のようにおくかは中3数学αを参照。

$$(3) \frac{x-1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \text{ とおく}$$

a, b, c を求めると, $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{3}$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1} dx &= \int_0^1 \left\{ -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right\} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3} \log(x+1) + \frac{1}{3} \log(x^2-x+1) \right]_0^1 = -\frac{2}{3} \log 2 \end{aligned}$$

三角関数の積は、半角の公式や積和公式を利用して積を和に直す。

例6

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

(解説)

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

[注] $\sin, \cos$ の偶数乗は半角の公式で和に直す。

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - \sqrt{2} \sin x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos 2x}{2} - \sqrt{2} \sin x + 1 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{\sin 2x}{4} + \sqrt{2} \cos x + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 - \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4} \quad \text{より}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4} \right) dx \\
 &= \left[\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[注]} \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right)
 \end{aligned}$$

などと1つずつ変形してもよいが、解答のように解いた方が楽である。

例7

$$(1) \int \sin x \sin 3x dx = \text{ア} \boxed{} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x dx = \text{イ} \boxed{}$$

$$(3) \int \cos x \sin 3x dx = \text{ウ} \boxed{} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x dx = \text{エ} \boxed{}$$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \int \sin x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx \quad (\text{積和公式}) \\
 &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x dx = \left[\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \cos x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx \text{ (積和公式)} \\
 &= -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C \text{ (} C \text{ は積分定数)}
 \end{aligned}$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x dx = \left[-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}$$

例8

- (1) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ を求めよ。
- (2) $\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ。ただし m, n は自然数とする。
- (3) $\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \cos kx \right)^2 dx$ を求めよ。

解説

$$(1) \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) I = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx \text{ とおくと}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \} dx$$

$m = n$ のとき

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 2mx + 1) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2m} \sin 2mx + x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$m \neq n$ のとき

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right]_0^{\pi} = 0$$

(3) (1), (2)より

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \cos kx \right)^2 dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \cos^2 kx dx = n \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{n}{2} \pi$$

補1

(1) 整数 m, n に対して, 積分 $I_{m, n} = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して, 積分 $J_n = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cos kx \right)^2 dx$ を求めよ。

解説

$$(1) I_{m, n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \} dx$$

(i) $m+n \neq 0$ かつ $m-n \neq 0$, すなわち $m \neq \pm n$ のとき

$$I_{m, n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right]_0^{2\pi} = 0$$

(ii) $m+n \neq 0$ かつ $m-n=0$, すなわち $m=n \neq 0$ のとき

$$I_{m, n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ \cos(m+n)x + 1 \} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + x \right]_0^{2\pi} = \pi$$

(iii) $m+n=0$ かつ $m-n \neq 0$, すなわち $m=-n \neq 0$ のとき

$$I_{m, n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ 1 + \cos(m-n)x \} dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right]_0^{2\pi} = \pi$$

(iv) $m+n=0$ かつ $m-n=0$, すなわち $m=n=0$ のとき

$$I_{m, n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+1) dx = \int_0^{2\pi} dx = \left[x \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

(i)~(iv)より

$$m \neq \pm n \text{ のとき } I_{m, n} = 0,$$

$$m = \pm n \ (\neq 0) \text{ のとき } I_{m, n} = \pi,$$

$$m = n = 0 \text{ のとき } I_{m, n} = 2\pi$$

(2) (1)より

$$J_n = \int_0^{2\pi} (\cos x + \sqrt{2} \cos 2x + \cdots + \sqrt{n} \cos nx)^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x + 2\cos^2 2x + \cdots + n\cos^2 nx) dx$$

$$= \pi + 2\pi + \cdots + n\pi = \frac{n(n+1)}{2} \pi$$