

## 3.5 不等式への応用

### (1) 不等式への応用

関数の増減を調べることにより、不等式を証明することを考える。

#### 例1

$e$  は自然対数の底とする。

(1)  $x > 0$  のとき、不等式  $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$  を示せ。

(2) (1) の結果を用いて、極限值  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$  を求めよ。

(3)  $S_n = \sum_{k=1}^n k e^{-k}$  とする。極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

解説

$$(1) e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) > 0 \text{ を示せばよい}$$

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$

$$f''(x) = e^x - 1$$

$$x > 0 \text{ で } f''(x) > 0 \text{ より}$$

$$x > 0 \text{ で } f'(x) \text{ は単調増加}$$

$$f'(0) = 0 \text{ より, } f'(x) > 0$$

$$f(x) \text{ は単調増加}$$

$$f(0) = 0 \text{ より, } x > 0 \text{ で } f(x) > 0$$

よって、示された

$$(2) x > 0 \text{ のとき, } e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0 \text{ より}$$

$$0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}} = 0$  であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$(3) \quad S_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{S_n}{e} = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^3} + \dots + \frac{n-1}{e^n} + \frac{n}{e^{n+1}} \dots \textcircled{2}$$

①-②より

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) S_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n} - \frac{n}{e^{n+1}}$$

$$\frac{e-1}{e} \cdot S_n = \frac{\frac{1}{e} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{e}} - \frac{n}{e^{n+1}} = \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{e-1} - \frac{n}{e^{n+1}}$$

$$\therefore S_n = \frac{e \left( 1 - \frac{1}{e^n} \right)}{(e-1)^2} - \frac{1}{e-1} \cdot \frac{n}{e^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0, (2) \text{から} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$$

【注】一般に、任意の自然数  $n$  に対して、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

が成り立つ。これは、 $x^n \ll e^x (x \rightarrow \infty)$  ということである。

## 例2

$e$  は自然対数の底、 $\log$  は自然対数を表す。

(1)  $x > 0$  のとき、不等式  $2\sqrt{x} \geq \log x + 2$  を証明せよ。

(2) (1) の結果を用いて、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$  を求めよ。

解説

$$(1) \quad 2\sqrt{x} \geq \log x + 2$$

$$2\sqrt{x} - (\log x + 2) \geq 0 \text{ を示せばよい}$$

$f(x) = 2\sqrt{x} - (\log x + 2)$  とする

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$$

$f'(x) = 0$  となるのは,  $x = 1$

$x = 0$  で極小 極小値  $f(1) = 0$

よって, 示された

(2) (1) より,  $x > 0$  のとき

$$\log x \leq 2\sqrt{x} - 2$$

よって,  $x > 1$  のとき

$$0 < \frac{\log x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x} - 2}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right) = 0$  であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

[注] 一般に, 任意の自然数  $n$  に対して,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\log x} = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^n} = 0$$

が成り立つ。これは,  $x^n \gg \log x$  ( $x \rightarrow \infty$ ) ということである。

### 例3

$0 < x < 1$  のとき, 不等式  $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} < x^x$  が成り立つことを示せ。

(解説)

$0 < x < 1$  より, 両辺はともに正であるから

両辺の自然対数をとると

$$(x+1)\log \frac{x+1}{2} < x\log x$$

$$x\log x - (x+1)\log \frac{x+1}{2} > 0 \text{ を示せばよい}$$

$f(x) = x\log x - (x+1)\log \frac{x+1}{2}$  ( $0 < x \leq 1$ ) とおくと

$$f'(x) = \log x + 1 - \log \frac{x+1}{2} - (x+1) \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \log \frac{2x}{x+1}$$

|         |            |            |   |            |
|---------|------------|------------|---|------------|
| $x$     | 0          | ...        | 1 | ...        |
| $f'(x)$ | $\swarrow$ | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\swarrow$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

ここで、 $\frac{2x}{x+1}=2-\frac{2}{x+1}$  であるから、

$0 < x < 1$  のとき  $0 < \frac{2x}{x+1} < 1$  より、 $f'(x) < 0$

よって、 $f(x)$  は  $0 < x < 1$  で単調減少

$f(1)=0$  より、 $0 < x < 1$  のとき  $f(x) > 0$

よって、示された

#### 例4

(1)  $x$  についての不等式  $ax \geq \log x$  がすべての  $x (x > 0)$  について成り立つような  $a$  の値の範囲を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

(2) 次の条件(\*)を満たすような実数  $a$  で最大のものを求めよ。

(\*)  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲のすべての  $x$  に対して  $\cos x \leq 1 - ax^2$  が成り立つ。

解説

(1)  $f(x) = \log x$  とおくと、 $f'(x) = \frac{1}{x}$

$y = f(x)$  の  $x = t$  における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \therefore y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

これが原点を通るとき

$$\log t - 1 = 0 \quad \therefore t = e$$

このとき、接線の方程式は  $y = \frac{1}{e}x$

よって、求める  $a$  の値の範囲は、 $a \geq \frac{1}{e}$

別解 定数分離

$$ax \geq \log x$$

$x > 0$  であるから、両辺  $x$  で割って、 $\frac{\log x}{x} \leq a$  として、

$y = \frac{\log x}{x}$  の最大値が  $a$  以下となるとして  $a$  の範囲を求めてもよい

(2)  $\cos x \leq 1 - ax^2$

$$1 - ax^2 - \cos x \geq 0$$

$$f(x)=1-ax^2-\cos x \text{ とおく}$$

$f(x)$  は偶関数より,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で考えればよい

$0 \leq \cos x \leq 1$  より,  $a \leq 0$  のときは明らかに成立するから,  
 $a > 0$  で考える

$$f'(x) = -2ax + \sin x$$

$$f''(x) = -2a + \cos x$$

(i)  $-2a \geq -1$  すなわち  $0 < a \leq \frac{1}{2}$  のとき

$$f''(x) = 0 \text{ となるのは, } \cos x = 2a$$

この解を  $x = \alpha$  とおくと,

$f'(x)$  は  $0 \leq x \leq \alpha$  で増加,  $\alpha \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で減少

$$f'(0) = 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \pi a$$

(ア)  $1 - \pi a \geq 0$  すなわち  $a \leq \frac{1}{\pi}$  のとき

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で  $f'(x) > 0$  となり,  $f(x)$  は  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で単調増加

$f(0) = 0$  より,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で  $f(x) \geq 0$

(イ)  $1 - \pi a < 0$  すなわち  $a > \frac{1}{\pi}$  のとき

$f'(x) = 0$  となる 0 以外の解を  $x = \beta$  ( $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) とすると,

$f(x)$  は  $0 \leq x \leq \beta$  で増加,  $\beta \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で減少

よって,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$  となればよいから

$$1 - \frac{\pi^2}{4}a \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{4}{\pi^2}$$

(ii)  $-2a < -1$  すなわち  $a > \frac{1}{2}$  のとき

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で  $f''(x) < 0$  より,  $f'(x)$  は  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で単調減少

$f'(0) = 0$  より,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で  $f'(x) \leq 0$

よって、 $f(x)$  は  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で単調減少

$f(0)=0$  より、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で  $f(x) \leq 0$  となり不適

(i), (ii)より、 $a$  の最大値は、 $a = \frac{4}{\pi^2}$

**別解** 定数分離

$$\cos x \leq 1 - ax^2$$

$x=0$  のとき、与えられた不等式はすべての実数  $a$  について成り立つ  
 $x \neq 0$  のとき、

$$a \leq \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ とおく}$$

$f(x)$  は偶関数であるから、 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$  における  $f(x)$  の増減を考える

$$f'(x) = \frac{x^2 \sin x - 2x(1 - \cos x)}{x^4} = \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{x^3}$$

$$g(x) = x \sin x + 2 \cos x - 2 \text{ とおくと}$$

$$g'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x = -\sin x + x \cos x$$

$$g''(x) = -\cos x + \cos x - x \sin x = -x \sin x$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } g''(x) \leq 0 \text{ より}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } g'(x) \text{ は単調減少}$$

$$g'(0) = 0 \text{ より, } g'(x) \leq 0 \text{ より}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } g(x) \text{ は単調減少}$$

$$g(0) = 0 \text{ より, } g(x) \leq 0$$

よって、 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$  において  $f'(x) < 0$  より

$f(x)$  は単調減少

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

| $x$     | 0          | ...        | $\frac{\pi}{2}$ |
|---------|------------|------------|-----------------|
| $f'(x)$ | $\swarrow$ | -          |                 |
| $f(x)$  | $\swarrow$ | $\searrow$ |                 |

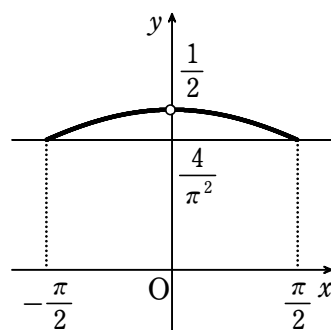
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$$

よって、 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $x \neq 0$  における

$y=f(x)$  のグラフは右図

定義域内のすべての  $x$  に対して  $a \leq f(x)$

が成り立つような  $a$  の最大値は、 $a = \frac{4}{\pi^2}$



### 例6

(1)  $x > 0$  のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$$

(2)  $x \geq 1$  のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x \log x \geq (x-1) \log(x+1)$$

(3) 整数  $n (n \geq 3)$  に対して、不等式  $(n!)^2 > n^n$  が成り立つことを示せ。

**解説**

(1)  $f(x) = \log x$  とおく

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

平均値の定理より

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c) \quad \therefore \log(x+1) - \log x = \frac{1}{c}$$

となる  $c (x < c < x+1)$  が存在する

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{x} \text{ より}$$

$$\log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$$

**別解**

$f(x) = \frac{1}{x} - \log(x+1) + \log x$  とすると

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2(x+1)}$$

$x > 0$  のとき  $f'(x) < 0$  より、 $f(x)$  は単調減少

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + \log \frac{x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{x} + \log \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) \right\} = 0 \text{ より}$$

$$f(x) > 0$$

$$\text{よって, } \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(2) \ g(x) = x \log x - (x-1) \log(x+1) \text{ とおくと}$$

$$g'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - \log(x+1) - (x-1) \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2}{x+1} + \log x - \log(x+1)$$

$$(1) \text{ より, } x \geq 1 \text{ のとき } \log x - \log(x+1) > -\frac{1}{x} \text{ より}$$

$$g'(x) > \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x(x+1)} > 0 \quad (x > 1)$$

よって,  $x \geq 1$  のとき  $g(x)$  は単調増加

$$g(1) = 0 \text{ より,}$$

$$g(x) \geq 0$$

$$\text{よって, } x \log x \geq (x-1) \log(x+1) \quad (x \geq 1)$$

$$(3) \ (n!)^2 > n^n \dots \textcircled{1} \text{ とする}$$

$$(i) \ n=3 \text{ のとき}$$

$$(3!)^2 - 3^3 = 36 - 27 = 9 > 0$$

よって,  $n=3$  のとき成り立つ

$$(ii) \ n=k \ (k \geq 3) \text{ のとき成り立つと仮定して}$$

$$(k!)^2 > k^k$$

$n=k+1$  のとき成り立つこと示す

$$\{(k+1)!\}^2 = (k+1)^2 \cdot (k!)^2 > (k+1)^2 k^k$$

ここで,  $x \geq 1$  のとき (2) より

$$\log x^x \geq \log(x+1)^{x-1}$$

$$x^x \geq (x+1)^{x-1}$$

であるから

$$\{(k+1)!\}^2 > (k+1)^2 (k+1)^{k-1} = (k+1)^{k+1}$$

よって,  $n=k+1$  のときも成り立つ

(i), (ii) から数学的帰納法より

$$(n!)^2 > n^n \quad (n \geq 3)$$

## (2) 2変数の不等式の証明

2変数の不等式の証明は

1. 置き換え
2. 一方を固定(定数とみる)
3. 平均値の定理

のいずれかの方法で証明できる。

### 例7

$0 < a < b$  のとき，不等式  $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$  が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(解説)

右側の不等式について，両辺を  $a (>0)$  で割ると

$$\frac{\frac{b}{a} - 1}{\log \frac{b}{a}} < \frac{\frac{b}{a} + 1}{2}$$

$\frac{b}{a} = x$  とおくと，  $x > 1$

$$\frac{x-1}{\log x} < \frac{x+1}{2}$$

$$(x+1)\log x > 2(x-1)$$

$(x+1)\log x - 2(x-1) > 0$  を示せばよい

$f(x) = (x+1)\log x - 2(x-1)$  とおく

$$f'(x) = \log x + \frac{1}{x} - 1$$

$f''(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0$  より，  $f'(x)$  は単調増加

$f'(1) = 0$  より，  $x > 1$  で  $f'(x) > 0$

よって，  $x > 1$  で  $f(x)$  は単調増加

$f(1) = 0$  より，  $x > 1$  で  $f(x) > 0$

左側の不等式についても，同様に，両辺を  $a$  で割ると

$$\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{\frac{b}{a} - 1}{\log \frac{b}{a}}$$

$$\frac{b}{a} = x \text{ とおくと, } x > 1$$

$$\sqrt{x} < \frac{x-1}{\log x}$$

$$\log x < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \log x > 0 \text{ を示せばよい}$$

$$g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \log x \text{ とおく}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2x} \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 \right) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} > 0 \text{ より, } g(x) \text{ は単調増加}$$

$$g(1) = 0 \text{ より, } x > 1 \text{ で } g(x) > 0$$

#### 例8

$x$  と  $y$  が  $0 \leq x \leq y \leq \pi$  を満たすとき, 不等式

$$(x-y)\sin x - \cos y + \cos x \leq 1 - \cos(y-x) \leq \frac{(y-x)^2}{2}$$

が成り立つことを証明せよ。

解説説

$x$  を固定して

$$f(y) = 1 - \cos(y-x) - (x-y)\sin x + \cos y - \cos x \text{ とおく}$$

$$f'(y) = \sin(y-x) + \sin x - \sin y$$

$$= \sin(y-x) - (\sin y - \sin x)$$

$$= 2\sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y-x}{2} - 2\sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}$$

$$= 2 \left( \cos \frac{y-x}{2} - \cos \frac{y+x}{2} \right) \sin \frac{y-x}{2}$$

$$0 \leq \frac{y-x}{2} \leq \frac{y+x}{2} \leq \pi \text{ より}$$

$$\cos \frac{y-x}{2} - \cos \frac{y+x}{2} \geq 0, \quad \sin \frac{y-x}{2} \geq 0$$

$x \leq y \leq \pi$  で  $f'(y) \geq 0$  より,  $f(y)$  は  $x \leq y \leq \pi$  で単調増加

$$f(x) = 1 - \cos(x-x) - (x-x)\sin x + \cos x - \cos x = 0 \text{ より}$$

$$0 \leq x \leq y \leq \pi \text{ で } f(y) \geq 0,$$

$$\text{すなわち } (x-y)\sin x - \cos y + \cos x \leq 1 - \cos(y-x)$$

$$g(t) = \frac{t^2}{2} - (1 - \cos t) \text{ とおくと}$$

$$g'(t) = t - \sin t$$

$$g''(t) = 1 - \cos t \geq 0 \text{ より, } g'(t) \text{ は単調増加}$$

$$g'(0) = 0 \text{ より, } t \geq 0 \text{ で } g'(t) \geq 0$$

$$\text{よって, } t \geq 0 \text{ で } g(t) \text{ は単調増加}$$

$$g(0) = 0 \text{ より, } t \geq 0 \text{ で } g(t) \geq 0$$

$$0 \leq x \leq y \leq \pi \text{ のとき, } y - x \geq 0 \text{ より}$$

$$g(y - x) \geq 0$$

$$\text{すなわち, } \frac{(y - x)^2}{2} - \{1 - \cos(y - x)\} \geq 0$$

$$\text{よって, } 1 - \cos(y - x) \leq \frac{(y - x)^2}{2}$$

以上より

$$(x - y) \sin x - \cos y + \cos x \leq 1 - \cos(y - x) \leq \frac{(y - x)^2}{2}$$

#### 例9

すべての正の数  $x, y$  に対して, 不等式  $x(\log x - \log y) \geq x - y$  が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成り立つのは  $x = y$  の場合に限ることを示せ.

解説

$$f(u) = \log u \text{ とおくと, } f'(u) = \frac{1}{u}$$

(i)  $x > y > 0$  のとき

平均値の定理より

$$\frac{\log x - \log y}{x - y} = f'(c) \quad (0 < y < c < x)$$

を満たす  $c$  が存在する

$$\frac{\log x - \log y}{x - y} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{y} \text{ より}$$

$$\frac{\log x - \log y}{x - y} > \frac{1}{x}$$

$$x - y > 0, \quad x > 0 \text{ より, } x(\log x - \log y) > x - y$$

(ii)  $y > x > 0$  のとき

(i)と同様にして

$$\frac{\log x - \log y}{x - y} < \frac{1}{x}$$

$x - y < 0$ ,  $x > 0$  より,  $x(\log x - \log y) > x - y$

(iii)  $x = y > 0$  のとき

$$x(\log x - \log y) = x - y = 0$$

(i)~(iii)より, すべての正の数  $x, y$  に対して,  
与えられた不等式は成り立つ.

等号が成り立つのは,  $x = y$  のときに限る

### (3) 数列の収束の問題への応用

平均値の定理は, 漸化式で定義された数列の収束の問題にも利用することができる。大雑把に次のような流れになる。

漸化式  $a_{n+1} = f(a_n) \cdots \textcircled{1}$  に対して,

$x = f(x)$  の解を  $x = \alpha$  とすると,  $\alpha = f(\alpha) \cdots \textcircled{2}$  であるから,

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - f(\alpha) \cdots \textcircled{3}$$

となる

ここで, 平均値の定理より

$$\frac{f(a_n) - f(\alpha)}{a_n - \alpha} = f'(c), a_n < c < \alpha \text{ または } \alpha < c < a_n$$

となる  $c$  が存在するから, 必要であれば絶対値をとって,

$$|f(a_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| |a_n - \alpha|$$

$\textcircled{3}$ より

$$|a_{n+1} - \alpha| = |f'(c)| |a_n - \alpha|$$

$|f'(c)| < M < 1$  となる  $M$  を見つけて

$$|a_{n+1} - \alpha| < M |a_n - \alpha|$$

これをくり返し用いて,

$$|a_n - \alpha| < M^{n-1} |a_1 - \alpha|$$

から, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

として, 極限値を求めることができる。

**例10**

$a_1=0$ ,  $a_{n+1}=\log(a_n+e)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) で定まる数列  $\{a_n\}$  の収束について調べたい。次の問いに答えよ。

(1) 方程式  $x=\log(x+e)$  は  $x>0$  の範囲でただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

以下, (1) の実数解を  $\beta$  とする。

(2) すべての自然数  $n$  について  $0 \leq a_n < \beta$  が成り立つことを証明せよ。

(3)  $0 < a < b$  のとき  $\log b - \log a < \frac{b-a}{a}$  が成り立つことを証明せよ。

(4) すべての自然数  $n$  について  $\beta - a_{n+1} < \frac{1}{e}(\beta - a_n)$  が成り立つことを証明し, これを用いて  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$  を示せ。

**解説**

(1)  $x = \log(x+e)$

$$x - \log(x+e) = 0$$

$f(x) = x - \log(x+e)$  とおくと

$f(x)$  の定義域は,  $x > -e$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+e} = \frac{x+e-1}{x+e}$$

$x > 0$  のにおいて,  $f'(x) > 0$  より

$f(x)$  は  $x > 0$  において単調増加

$$f(0) = 0 - \log e = -1$$

$$f(e) = e - \log 2e > e - \log e^2 = e - 2 > 0$$

よって,  $f(x) = 0$  は  $x > 0$  の範囲でただ 1 つの実数解をもつ

(2)  $0 \leq a_n < \beta \cdots \textcircled{1}$

(i)  $n=1$  のとき

$a_1=0$  より,  $\textcircled{1}$  は成り立つ

(ii)  $n=k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) のとき成り立つと仮定して

$$0 \leq a_k < \beta$$

$n=k+1$  のとき成り立つことを示す

$$a_{k+1} = \log(a_k + e)$$

$e \leq a_k + e < \beta + e$  より

$$1 \leq \log(a_k + e) < \log(\beta + e)$$

$\beta$  は  $x = \log(x+e)$  の解であるから,  $\log(\beta+e) = \beta$  より

$$0 < 1 \leq a_{k+1} < \beta$$

よって、 $n = k + 1$  のときも①は成り立つ

(i), (ii)から、数学的帰納法より

すべての自然数  $n$  について①は成り立つ

$$(3) \ h(x) = \log x \text{ とおくと, } h'(x) = \frac{1}{x}$$

区間  $[a, b]$  において平均値の定理により

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(c), \quad a < c < b$$

を満たす実数  $c$  が存在する

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} = \frac{1}{c}$$

$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \text{ より}$$

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a} \quad \therefore \log b - \log a < \frac{b - a}{a}$$

(4) (2) より、すべての自然数  $n$  について  $0 \leq a_n < \beta$  より

$$e \leq a_n + e < \beta + e$$

(3) において、 $a = a_n + e$ ,  $b = \beta + e$  とすると

$$\log(\beta + e) - \log(a_n + e) < \frac{(\beta + e) - (a_n + e)}{a_n + e}$$

$$\beta - a_{n+1} < \frac{\beta - a_n}{a_n + e}$$

$a_n \geq 0$  より、 $a_n + e \geq e$

これと、 $\beta - a_n > 0$  であるから、 $\frac{\beta - a_n}{a_n + e} \leq \frac{\beta - a_n}{e}$  より

$$\beta - a_{n+1} < \frac{1}{e}(\beta - a_n)$$

これを繰り返し用いると

$$0 < \beta - a_n < \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}(\beta - a_1) = \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\beta$$

$0 < \frac{1}{e} < 1$  より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\beta = 0$  であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta - a_n) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$$

**例11**

$a, k$  は定数であり,  $0 < k < 1$  とする。

- (1) 方程式  $x = a + k \sin x$  はただ 1 つの実数解をもつことを示せ。
- (2) 不等式  $|\sin \theta| \leq |\theta|$  がすべての実数  $\theta$  に対して成立することを示せ。
- (3) 不等式  $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$  がすべての実数  $\alpha, \beta$  に対して成立することを示せ。
- (4) 数列  $\{x_n\}$  を,  $x_0 = 0, x_n = a + k \sin x_{n-1} \ (n = 1, 2, \dots)$  によって定める。数列  $\{x_n\}$  は (1) の方程式  $x = a + k \sin x$  の解に収束することを示せ。

(解説)

(1)  $f(x) = x - (a + k \sin x)$  とおくと,

$f(x)$  は微分可能であるから連続である

$$f'(x) = 1 - k \cos x$$

$0 < k < 1, -1 \leq \cos x \leq 1$  であるから,  $f'(x) > 0$  より

$f(x)$  は単調増加する。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ より}$$

$f(x) = 0$ , すなわち  $x = a + k \sin x$  はただ 1 つの実数解をもつ

(2)  $|\sin \theta| \leq 1$  より,  $|\theta| \geq 1$  のとき常に成り立つ

よって,  $|\theta| < 1$  のとき成り立つことを示せばよい

$$g(\theta) = |\theta| - |\sin \theta| \text{ とおくと}$$

$$g(-\theta) = |-\theta| - |\sin(-\theta)| = |\theta| - |\sin \theta| = g(\theta) \text{ より,}$$

$g(\theta)$  は偶関数であるから,

$0 \leq \theta < 1$  において  $g(\theta) \geq 0$  であることを示せばよい

$0 < \theta < 1$  のとき,  $|\sin \theta| = \sin \theta, |\theta| = \theta$  より

$g'(\theta) = 1 - \cos \theta > 0$  より,  $g(\theta)$  は  $0 \leq \theta < 1$  で単調増加

$$g(\theta) \geq g(0) = 0 \text{ より, } g(\theta) \geq 0$$

すべての実数  $\theta$  に対して,  $|\sin \theta| \leq |\theta|$

(3) (2) より

$$\begin{aligned} |\sin \alpha - \sin \beta| &= \left| 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{\alpha - \beta}{2} \right| = |\alpha - \beta| \end{aligned}$$

**別解**

$\alpha = \beta$  のとき、両辺ともに 0 となり等号が成り立つから、

$\alpha \neq \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) として証明すればよい

関数  $\sin x$  は実数全体で微分可能で、 $(\sin x)' = \cos x$  であるから、  
平均値の定理より

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} = \cos \gamma, \quad \alpha < \gamma < \beta$$

を満たす実数  $\gamma$  が存在する。

よって、 $|\sin \alpha - \sin \beta| = |\cos \gamma| |\alpha - \beta| \leq |\alpha - \beta|$

(4)  $x = a + k \sin x$  のただ 1 つの実数解を  $c$  とすると

$c = a + k \sin c$  より

$$\begin{aligned} x_n - c &= (a + k \sin x_{n-1}) - (a + k \sin c) \\ &= k(\sin x_{n-1} - \sin c) \end{aligned}$$

(3)より

$$|x_n - c| = k |\sin x_{n-1} - \sin c| \leq k |x_{n-1} - c|$$

よって

$$0 \leq |x_n - c| \leq k |x_{n-1} - c| \leq k^2 |x_{n-2} - c| \leq \cdots \leq k^n |x_0 - c| = k^n |c|$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} k^n |c| = 0$  であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - c| = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

したがって、数列  $\{x_n\}$  は方程式  $x = a + k \sin x$  の解に収束する

補1

次の問いに答えよ。ただし、 $e=2.718\cdots$  は自然対数の底である。

- (1)  $x>0$  のとき、不等式  $e^x>1+x$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $k$  を自然数とするとき、不等式  $e>\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$  が成り立つことを示せ。
- (3) 任意の自然数  $n$  に対して、不等式  $n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n$  が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。
- (4)  $99!>33^{99}$  を示せ。

解説

(1)  $f(x)=e^x-(1+x)$  とおく

$$f'(x)=e^x-1$$

$x>0$  のとき  $f'(x)>0$

よって、 $f(x)$  は  $x\geq 0$  で単調増加

$f(0)=0$  より、 $x>0$  のとき、 $f(x)>0$

したがって、 $x>0$  のとき、 $e^x>1+x\cdots\textcircled{1}$

(2)  $k$  が自然数のとき、 $\frac{1}{k}=x$  とおくと、 $x>0$

$\textcircled{1}$ より、 $e^{\frac{1}{k}}>1+\frac{1}{k}$

両辺正より、両辺  $k$  乗して、 $e>\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

(3)  $n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdots\textcircled{2}$ とする

(i)  $n=1$  のとき

左辺  $=1!=1$ 、右辺  $=\left(\frac{1}{e}\right)^1=\frac{1}{2.718\cdots}$  であるから、 $\textcircled{2}$ は成り立つ

(ii)  $n=k$  のとき

$\textcircled{2}$ 、すなわち、 $k!>\left(\frac{k}{e}\right)^k$  が成り立つと仮定して

この不等式の両辺に  $k+1$  を掛けると

$$(k+1)!>(k+1)\left(\frac{k}{e}\right)^k\cdots\textcircled{3}$$

(2)から、 $e>\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$  すなわち  $e>\frac{(k+1)^k}{k^k}$  より

$$k^k > \frac{(k+1)^k}{e}$$

よって、③の右辺について

$$(k+1)\left(\frac{k}{e}\right)^k > (k+1)\frac{1}{e^k} \cdot \frac{(k+1)^k}{e} = \frac{k+1}{e} \left(\frac{k+1}{e}\right)^k = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$$

$$(k+1)! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$$

$n = k+1$  のときも②は成り立つ

(i), (ii)から数学的帰納法より

任意の自然数  $n$  に対して、不等式  $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$  が成り立つ

(4) (3) で  $n=99$  とした不等式と  $\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$  を用いて

$$99! > \left(\frac{99}{e}\right)^{99} > \left(\frac{99}{3}\right)^{99} = 33^{99}$$

$$\therefore 99! > 33^{99}$$

## 補2

(1) すべての実数  $t$  に対して、不等式  $e^t \geq 1+t$  が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つ場合はどのようなときか。

(2) 実数  $t_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) に対して、 $x_j = e^{t_j}$  とおく。 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$  のとき、不等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つ場合はどのようなときか。

(3)  $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$  のとき、不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つ場合はどのようなときか。

## 解説

(1)  $f(t) = e^t - (1+t)$  とおくと

$$f'(t) = e^t - 1$$

$f'(t) = 0$  となるのは、 $t=0$

$f(t)$  の増減表は下図

|         |            |     |            |
|---------|------------|-----|------------|
| $t$     | $\dots$    | $0$ | $\dots$    |
| $f'(t)$ | $-$        | $0$ | $+$        |
| $f(t)$  | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

よって,  $f(t) \geq 0$  より,  $e^t \geq 1+t$

等号は  $t=0$  のとき成り立つ

(2)  $x_1 x_2 \cdots x_n = e^{t_1+t_2+\cdots+t_n} = 1$  より

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 0$$

(1) から,  $x_j \geq 1+t_j$  より

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq (1+t_1) + (1+t_2) + \cdots + (1+t_n) = n$$

等号は,  $t_j = 0$ , すなわち  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$  のとき成り立つ

(3)  $\frac{x_j}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} = y_j$  とおくと,

$y_j > 0$  より,  $y_j = e^{t_j}$  ( $t_j$  は実数) とおける

$y_1 y_2 \cdots y_n = 1$  であるから, (2) より

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq n$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

等号は  $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ ,

すなわち  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$  のとき成り立つ

### 補3

(1)  $x \geq 0$  のとき,  $x - x^2 \leq \log(1+x) \leq x$  が成り立つことを示せ。

(2) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \log\left(1 + \frac{k}{n^3}\right)$  を求めよ。

#### 解説

(1)  $f(x) = x - \log(1+x)$  とおくと

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$x > 0$  のとき,  $f'(x) > 0$  より

$f(x)$  は  $x \geq 0$  で単調増加

$f(0) = 0$  より,  $x \geq 0$  のとき,  $f(x) \geq 0$

よって,  $x \geq 0$  のとき,  $\log(1+x) \leq x$

$g(x) = \log(1+x) - (x-x^2)$  とおくと

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-2x) = \frac{x+2x^2}{1+x}$$

$x > 0$  のとき,  $g'(x) > 0$  より

$g(x)$  は  $x \geq 0$  で単調増加

$g(0) = 0$  より,  $x \geq 0$  のとき,  $g(x) \geq 0$

よって,  $x \geq 0$  のとき,  $x - x^2 \leq \log(1+x)$

以上より,  $x \geq 0$  のとき,  $x - x^2 \leq \log(1+x) \leq x$

(2)  $n > 0$ ,  $k > 0$  であるから  $\frac{k}{n^3} \geq 0$  より

(1) の不等式から

$$\frac{k}{n^3} - \left(\frac{k}{n^3}\right)^2 \leq \log\left(1 + \frac{k}{n^3}\right) \leq \frac{k}{n^3}$$

辺々を  $k=1, 2, \dots, n^2$  まで足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n^2} \left\{ \frac{k}{n^3} - \left(\frac{k}{n^3}\right)^2 \right\} \leq \sum_{k=1}^{n^2} \log\left(1 + \frac{k}{n^3}\right) \leq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^3}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \left( \frac{k}{n^3} - \frac{k^2}{n^6} \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \log\left(1 + \frac{k}{n^3}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^3}$$

$$\text{ここで, } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^3} = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{2} n^2(n^2+1) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k^2}{n^6} = \frac{1}{n^7} \cdot \frac{1}{6} n^2(n^2+1)(2n^2+1) = \frac{1}{6n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \left( \frac{k}{n^3} - \frac{k^2}{n^6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{6n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) \right\} = \frac{1}{2}$$

よって, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \log\left(1 + \frac{k}{n^3}\right) = \frac{1}{2}$$

**補4**

次の問いに答えよ.

(1)  $x \geq 0$  のとき, 不等式  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$  を証明せよ.

(2)  $k$  を定数とする. (1) を利用して,  $x$  が正の値をとりながら  $0$  に近づくとき, 極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x + kx^2} \right)$  を求めよ.

**解説**

(1)  $f(x) = x - \sin x$  とおくと

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$  より,

$f(x)$  は  $x \geq 0$  で単調増加

$f(0) = 0$  より,  $x \geq 0$  で  $f(x) \geq 0$

よって,  $x \geq 0$  で  $x \geq \sin x$

$g(x) = \sin x - \left( x - \frac{1}{6}x^3 \right)$  とおくと

$g'(x) = \cos x - \left( 1 - \frac{1}{2}x^2 \right),$

$g''(x) = -\sin x + x$

前半の結果から,  $x \geq 0$  で  $g''(x) \geq 0$  より,

$g'(x)$  は  $x \geq 0$  で単調増加

$g'(0) = 0$  より,  $x \geq 0$  で  $g'(x) \geq 0$

よって,  $x \geq 0$  で  $g(x)$  は単調増加

$g(0) = 0$  より,  $x \geq 0$  で  $g(x) \geq 0$

よって,  $x \geq 0$  で  $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$

(2) 十分小さい正の実数  $x$  に対して,  $x - \frac{x^3}{6} = x \left( 1 - \frac{x^2}{6} \right) > 0$

と(1)より

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x} \leq \frac{1}{x - \frac{1}{6}x^3}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + kx^2} \leq \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x + kx^2} \leq \frac{1}{x - \frac{1}{6}x^3} - \frac{1}{x + kx^2}$$

ここで

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x + kx^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + kx} = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x - \frac{1}{6}x^3} - \frac{1}{x + kx^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \frac{1}{6}x}{\left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)(1 + kx)} = k$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x + kx^2} \right) = k$$