

1.5 いろいろな積分

(1) 偶関数・奇関数の定積分

関数 $y=f(x)$ において,

常に $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき, $f(x)$ は偶関数

常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき, $f(x)$ は奇関数

であるという。

偶関数, 奇関数の定積分について, 次のことが成り立つ。

偶関数・奇関数の定積分

1. $f(x)$ が偶関数のとき, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

2. $f(x)$ が奇関数のとき, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

証明

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

x	$-a \rightarrow 0$
t	$a \rightarrow 0$

右辺の第1項において, $x=-t$ とおくと

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-1)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$$

よって,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a \{f(-x) + f(x)\}dx$$

この式で, $f(x)$ が偶関数ならば $f(-x)=f(x)$, 奇関数ならば $f(-x)=-f(x)$ であるから, 上の1,2が成り立つ。

注

上の定義より, $f(x)$ が偶関数ならば, $y=f(x)$ のグラフは y 軸対称であり, $f(x)$ が奇関数ならば, $y=f(x)$ のグラフは原点对称である。

偶関数の例として, $1, x^2, x^4, \dots, \cos x$

奇関数の例として, $x, x^3, x^5, \dots, \sin x, \tan x$

などがある。

例1

(1) α, β は実数とする。どのような実数 p, q に対しても

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (p \cos x + q \sin x)(x^2 + \alpha x + \beta) dx = 0$$

となるのは、 $\alpha = \text{ }^{\text{ア}} \boxed{}$ 、 $\beta = \text{ }^{\text{イ}} \boxed{}$ のときである。

(2) 定積分 $\int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin t + 3 \cos t)^2 dt$ の値を求めると $\boxed{}$ である。

解説

(1) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (p \cos x + q \sin x)(x^2 + \alpha x + \beta) dx$ とおく

$x^2 \cos x$, $x \sin x$, $\cos x$ は偶関数,

$x^2 \sin x$, $x \cos x$, $\sin x$ は奇関数より

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos x \cdot (x^2 + \beta) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \alpha x \sin x dx \\ &= 2p \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + \beta) \cos x dx + 2q\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left[x(-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + \beta) \cos x dx = \left[(x^2 + \beta) \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} + \beta - 2$$

より

$$I = 2p \left(\frac{\pi^2}{4} + \beta - 2 \right) + 2q\alpha$$

どのような実数 p, q に対しても $I = 0$ となるとき

$$\frac{\pi^2}{4} + \beta - 2 = 0, \quad 2\alpha = 0$$

$$\therefore \alpha = \text{ }^{\text{ア}} 0, \quad \beta = \text{ }^{\text{イ}} 2 - \frac{\pi^2}{4}$$

〔注〕一般に，

偶関数 $\times$ 偶関数＝偶関数

偶関数 $\times$ 奇関数＝奇関数

奇関数 $\times$ 奇関数＝偶関数

が成り立つ。いちばん上だけ示しておく。

$f(x)$, $g(x)$ を偶関数とすると， $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=g(x)$ であるから

$f(-x)g(-x)=f(x)g(x)$ より， $f(x)g(x)$ は偶関数である

他も同様に示せる。

$$\begin{aligned}(2) & \int_{-\pi}^{\pi} (2\sin t + 3\cos t)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (4\sin^2 t + 12\sin t \cos t + 9\cos^2 t) dt \\&= 2 \int_0^{\pi} (4\sin^2 t + 9\cos^2 t) dt \\&= 2 \int_0^{\pi} \left\{ 2(1 - \cos 2t) + \frac{9(1 + \cos 2t)}{2} \right\} dt \\&= \int_0^{\pi} (13 + 5\cos 2t) dt \\&= \left[13t + \frac{5\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = 13\pi\end{aligned}$$

例2

次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{-1}^1 \frac{1-2x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

〔解説〕

$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ は偶関数， $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ は奇関数より

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1-2x}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$x=2\sin\theta$ とおくと， $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ より

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = 2 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$

例3

$f(x)$ は微分可能な関数であるとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = x \cos x$ であるとき、導関数 $f'(x)$ を求め、 $f'(x)$ が偶関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ が奇関数であるとき、導関数 $f'(x)$ が偶関数であることを示せ。

(3) $f(x)$ が奇関数であるとき、定積分 $\int_0^x f(t) dt$ が偶関数であることを示せ。

(解説)

$$(1) f'(x) = (x)' \cos x + x(\cos x)' = \cos x - x \sin x$$

$$f'(-x) = \cos(-x) - (-x) \cdot \sin(-x) = \cos x - x \sin x = f'(x) \text{ より}$$

$f'(x)$ は偶関数である

$$(2) f(x) \text{ は奇関数より, } f(x) = -f(-x)$$

$$f'(x) = \{-f(-x)\}' = -f'(-x) \cdot (-x)' = f'(-x)$$

$f'(x)$ は偶関数である。

$$(3) f(x) \text{ は奇関数より, } f(x) = -f(-x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ とすると}$$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt$$

$$u = -t \text{ とおくと, } \frac{dt}{du} = -1 \text{ より}$$

$$F(-x) = \int_0^x f(-u) \cdot (-1) du$$

$$= \int_0^x f(u) du = F(x)$$

よって、 $\int_0^x f(t) dt$ は偶関数である

t	$0 \rightarrow -x$
u	$0 \rightarrow x$

線対称性, 点対称性を利用した置換積分をいくつかやっておく。

例4

(1) 等式 $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}} dx$ を示せ。

(2) 定積分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$ を求めよ。

解説

(1) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x} dx$ において,

$x = -t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

よって

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x} dx = \int_1^0 \frac{(-t)^2}{1+e^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{t^2}{1+e^{-t}} dt = \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}} dx$$

$$(2) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 e^x}{1+e^x} + \frac{x^2}{1+e^x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2(1+e^x)}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

x	$-1 \rightarrow 0$
t	$1 \rightarrow 0$

例5

(1) $f(x)$ を連続関数とするととき, $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$ の値を求めよ。

解説

$$(1) I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx \text{ とおく}$$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ であるから,
 $t = \pi - x$ とおくと, $x = \pi - t$ より

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx \\ &= \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) \cdot (-dt) \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - I \\ \therefore I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \end{aligned}$$

$$(2) J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx \text{ とおく}$$

関数 $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 8}$ は連続関数であるから, (1) より

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x (\sin^2 x + 8) - 8 \sin x}{\sin^2 x + 8} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\sin x - \frac{8 \sin x}{\sin^2 x + 8} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_0^{\pi} \frac{8 \sin x}{9 - \cos^2 x} dx \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2$$

x	$0 \rightarrow \pi$
t	$\pi \rightarrow 0$

$\int_0^{\pi} \frac{8\sin x}{9-\cos^2 x} dx$ について, $u=\cos x$ とおくと

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}} = -\frac{1}{\sin x}$$

x	$0 \rightarrow \pi$
u	$1 \rightarrow -1$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{8\sin x}{9-\cos^2 x} dx &= 8 \int_1^{-1} \frac{1}{9-u^2} \cdot (-du) \\ &= 8 \int_{-1}^1 \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3+u} + \frac{1}{3-u} \right) du \\ &= \frac{4}{3} \left[\log|3+u| - \log|3-u| \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3} \log 2 \end{aligned}$$

したがって

$$J = \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{8}{3} \log 2 \right) = \pi \left(1 - \frac{4}{3} \log 2 \right)$$

例6

(1) $x = \frac{\pi}{2} - y$ において $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sin y + \cos y} dy$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ を求めよ。

解説

(1) $x = \frac{\pi}{2} - y$ とおくと,

$$\frac{dx}{dy} = -1$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
y	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} \cdot (-1) dy \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos y}{\cos y + \sin y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sin y + \cos y} dy \end{aligned}$$

(2) (1)から, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(2) 積分の列

積分の列は, もとの積分が計算できなくても, 隣接する項の和や差をとると, 計算できる形になることがある。

例7

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$) とおく.

$I_n + I_{n+1}$ を n の式で表すと $\mathcal{A} \boxed{}$ である.

$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = a_n I_0 + b_n I_n$ とおくと, $a_n = \mathcal{I} \boxed{}$, $b_n = \mathcal{U} \boxed{}$ である.

解説

$$(\mathcal{A}) \quad I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$(\mathcal{I}), (\mathcal{U}) \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (I_{k-1} + I_k)$$

$$= (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots + (-1)^{n-1} (I_{n-1} + I_n)$$

$$= I_0 + (-1)^{n-1} I_n$$

よって

$$a_n = 1, \quad b_n = (-1)^{n-1}$$

例8

整数 n に対して, $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x} dx$ とする。

- (1) I_0 を求めよ。
- (2) n を正の整数とすると, $I_n - I_{n-1}$ を求めよ。
- (3) I_5 を求めよ。

$$(1) I_0 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left[\log |\sin x| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \log \sqrt{2}$$

$$(2) I_n - I_{n-1} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x - \cos(2n-1)x}{\sin x} dx$$

$$\begin{aligned} & \cos(2n+1)x - \cos(2n-1)x \\ &= -2\sin \frac{(2n+1)x + (2n-1)x}{2} \sin \frac{(2n+1)x - (2n-1)x}{2} \\ &= -2\sin 2nx \sin x \text{ より} \end{aligned}$$

$$I_n - I_{n-1} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin 2nx) dx$$

$$= \left[\frac{\cos 2nx}{n} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n}{2}\pi \right)$$

$$(3) I_5 = (I_5 - I_4) + (I_4 - I_3) + (I_3 - I_2) + (I_2 - I_1) + (I_1 - I_0) + I_0$$

(2)より

$$I_5 = -\frac{1}{5} + 0 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 + (-1) + \log \sqrt{2} = \log \sqrt{2} - \frac{8}{15}$$

(3) 逆関数の積分

関数 $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ の積分について考える。

$$\int f^{-1}(x) dx = \int y dx$$

$y=f^{-1}(x)$ であるから, $x=f(y)$ より

$$\frac{dx}{dy} = f'(y)$$

よって

$$\begin{aligned}\int y dx &= \int y f'(y) dy \\ &= y f(y) - \int f(y) dy + C\end{aligned}$$

したがって、次のことが成り立ちます。

逆関数の積分

$f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもち、 $\int f(x) dx = F(x)$ とするとき

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$$

〔注〕 $y = \sin x$ の逆関数は、高校の範囲では $y = g(x)$ の形では表せない。
この公式は導出過程を理解しておくといよい。

例9

a を正の定数とする。任意の実数 x に対して、 $x = a \tan y$ を満たす $y \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$ を対応させる関数を $y = f(x)$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(a)$ を求めよ。

(2) $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ および $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ を x の式で表せ。

(3) $\int_0^a f(x) dx$ を求めよ。

解説

(1) $f(a) = b$ とおくと

$$a = a \tan b$$

$a > 0$ より

$$\tan b = 1 \quad \therefore b = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\cos^2 y}{a} = \frac{1}{a(1 + \tan^2 y)} = \frac{1}{a\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \left(\frac{a}{x^2 + a^2} \right)' = -\frac{2ax}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$(3) \int_0^a f(x) dx$$

$x = a \tan y$ より

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{\cos^2 y}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \cdot \frac{a}{\cos^2 y} dy \\ &= a \left[y \tan y \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \tan y dy \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + \left[\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) a = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) a \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow a$
y	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

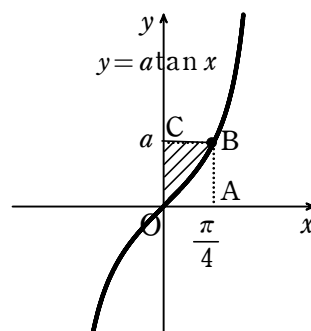
別解 面積を利用

$x = a \tan y$ は $y = a \tan x$ の x と y を入れ替えたものであるから、

$\int_0^a f(x) dx$ は図の斜線部の面積に等しい

よって

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx &= \frac{\pi}{4} \cdot a - \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \tan x dx \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) a \end{aligned}$$



(長方形 OABC から $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において $y = a \tan x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を引いた。)

例10

(1) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ のとき、 $y = f(x)$ の逆関数 $y = g(x)$ を求めよ。

(2) (1) の $f(x)$, $g(x)$ に対し、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = b f(b) - a f(a)$$

解説

$$(1) y = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ とおくと}$$

$$(e^x + 1)y = e^x$$

$$(1 - y)e^x = y$$

$$e^x = \frac{y}{1 - y} \quad \therefore x = \log \frac{y}{1 - y}$$

$$e^x > 0 \text{ より}$$

$$\frac{y}{1 - y} > 0$$

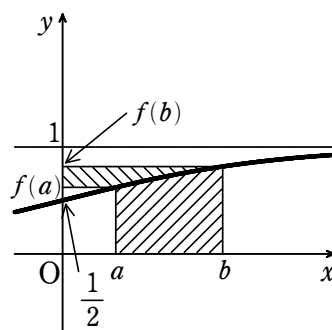
$$y(1 - y) > 0 \quad \therefore 0 < y < 1$$

$$\text{よって, 逆関数は } y = g(x) = \log \frac{x}{1 - x} \quad (0 < x < 1)$$

(2) $y = f(x)$ は単調増加な関数であり,
グラフは右図のようになる

$$g(y) = g(f(x)) = x, \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x f'(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \left[x f(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) dx \\ &= b f(b) - a f(a) \text{ (右図より明らか)} \end{aligned}$$



補1

- (1) $0 \leq x < \pi$ とする。 $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

が成り立つことを示せ。

- (2) $\int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$ を計算せよ。

- (3) $P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\sin x + \cos x} dx$, $Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x + \cos x} dx$ とおく。

$P=Q$ であることを示し、これを利用して P の値を求めよ。

(解説)

- (1) $1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ であるから, $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$ より

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = 2\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{1+t^2}$$

- (2) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと, (1)より

$$\int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{(1+t^2) + 2t + (1-t^2)} dt = \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$= \log|1+t| + C = \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

- (3) P について, $x = \frac{\pi}{2} - \theta$ とおくと, $\frac{dx}{d\theta} = -1$ より

$$P = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta} (-d\theta)$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
θ	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} d\theta = Q \quad \therefore P = Q \dots \textcircled{1}$$

また, (1)より

$$P + Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx = \left[\log \left(1 + \tan \frac{x}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log 2 \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$P = \frac{1}{2} \log 2$$