

高3理系数学 標準問題演習 演習 19.複素数平面(3)

1 [I . 2016 法政大 II . 2001 香川大 III . 2001 島根大]

- I. (1) $|2+3i|$ の値を求めよ.
- (2) $|z+2-i|=4$ を満たす複素数平面上の点 z は, ある円上の点となる. 円の中心と半径を求めよ.
- (3) $2|z-2-i|=|z-2-4i|$ を満たす複素数平面上の点 z は, ある円上の点となる. 円の中心と半径を求めよ.

- II. (1) $|z+3|=|z+1|$ を満たす複素数 z の全体は, 複素数平面上でどんな図形を描くかを調べ, 図示せよ.
- (2) $|z-2|=2|z+1|$ を満たす複素数 z の全体は, 複素数平面上でどんな図形を描くかを調べ, 図示せよ.
- (3) $|z+3|=|z+1|=\frac{|z-2|}{2}$ を満たす複素数 z を求めよ.

- III. (1) 複素数平面において, 条件 $|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{2}|z+2-\sqrt{3}i|$ を満たす点 z はどのような図形を描くか.
- (2) (1) で求めた図形を C とする. 点 z が図形 C 上を動くとき, z の絶対値 $|z|$ の値の範囲と z の偏角 θ の範囲をそれぞれ求めよ. ただし, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする.

2 [I . 1999 和歌山県立医科大 II . 電気通信大 III . 2020 東北大]

I. 複素数平面上において, 複素数 z は原点を通らない直線上を動くものとする. このとき, z はある複素数 α に対して, $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 1 = 0$ を満たすことを示せ.

II. 0 でない複素数 α に対し, 方程式 $\alpha z + \overline{\alpha}z = 1$ で定まる複素数平面上の直線を $l_{[\alpha]}$ で表す.

- (1) $\alpha=1$ のときの直線 $l_{[1]}$ を図示せよ.
- (2) $\alpha=i$ のときの直線 $l_{[i]}$ を図示せよ.
- (3) 直線 $l_{[\alpha]}$ が 2 つの点 $3+i, -1-2i$ を通るとき, α を求めよ.
- (4) 原点 O と直線 $l_{[\alpha]}$ の距離を α を用いて表せ.
- (5) 0 でない複素数 α, β に対し, $l_{[\alpha]}, l_{[\beta]}$ が 1 点 γ で交わるとする. このとき, γ は 0 ではなく, $l_{[\gamma]}$ は α と β を通ることを示せ.

高3理系数学 標準問題演習 演習 19.複素数平面(3)

Ⅲ. 複素数平面上の原点を通らない異なる2直線 l, m に関して, 原点と対称な点をそれぞれ α, β とする。

- (1) 直線 l 上の点 z は常に, $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = |\alpha|^2$ を満たすことを示せ。
- (2) $\overline{\alpha}\beta$ が実数でないことが, l と m が交点をもつための必要十分条件であることを示せ。また, l と m が交点をもつとき, 交点を α, β を用いて表せ。

③ [Ⅰ. 九州大 Ⅱ. 慶応義塾大 Ⅲ. 宮崎大 Ⅳ. 法政大 Ⅴ. 金沢大]

Ⅰ. 複素数平面上の点 z を考える。

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ を満たすとき, $az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$ を満たす点 z は $a \neq 0$ のとき, どのような図形を描くか。ただし, $\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。
- (2) 0 でない複素数 d に対して, $dz(\overline{z} + 1) = \overline{d}\overline{z}(z + 1)$ を満たす点 z はどのような図形を描くか。

Ⅱ. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$ で表される円は, 複素数 $z = x + yi$ を用いて

$$\left| z - \left(\boxed{} + \boxed{}i \right) \right| = \boxed{}$$

と書ける。 $\overline{z} = x - yi$ とすれば

$$z\overline{z} - \left(\boxed{} - \boxed{}i \right)z - \left(\boxed{} + \boxed{}i \right)\overline{z} - \boxed{} = 0$$

とも書ける。また,

$$\left| z + \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \left(\boxed{} + i \right) \right| = \frac{\boxed{}}{\sqrt{\boxed{}}} |z|$$

と表すこともできる。

Ⅲ. (1) $|z| = 2, |z + i| = |z - 1|$ を満たす複素数 z は2つあることを示し, それらの値を求めよ。

- (2) (1) で求めた2つの複素数を α, β (ただし, α の実部は β の実部より大きい) とするとき, $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数でさらに $|\gamma - \alpha| = 4$ をみたす γ を求めよ。また, そのときの $\angle \alpha\beta\gamma$ の大きさを求めよ。

Ⅳ. 複素数平面上に, 2つの不等式 $|z - (1 + 2i)| \leq |z - (2 + 3i)|, |z - (1 + 2i)| \leq 1$ を同時に満たす複素数 z の存在範囲を描き, この部分の面積を求めよ。

高3理系数学 標準問題演習 演習 19.複素数平面(3)

V. r を正の定数とする. このとき複素数平面上で,

(1) $|z-1| \leq r$ を満たす複素数 z の全体が表す図形を図示せよ.

(2) $\left| \frac{1}{z} - 1 \right| \leq r$ を満たす複素数 z の全体が表す図形を図示せよ.

(3) $|z-1| \leq \sqrt{2}$ と $\left| \frac{1}{z} - 1 \right| \leq \sqrt{2}$ を同時に満たす複素数 z の全体が表す図形の面積を求めよ.

〔4〕〔I. 1996 日本大 II. 2004 一橋大〕

I. 複素数 $z = a + bi$ (a, b は実数) が不等式 $2 \leq z + \frac{16}{z} \leq 10$ を満たすとき, 点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ.

II. 複素数平面上に異なる3点 z, z^2, z^3 がある.

(1) z, z^2, z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ.

(2) z, z^2, z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ.

また, z, z^2, z^3 が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ.

〔5〕〔(1) 1998 青山学院大 (2) 琉球大〕

(1) 複素数 $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) と $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ の積は $-1 + \sqrt{3}i$ であるとする. このと

き $a = \boxed{}, b = \boxed{}$ である. この α と複素数 z に対して $w = \alpha z$ とおく. 複素数平面上で, z を表す点が $\sqrt{3} - i$ を表す点を中心とする半径1の円上を動くとき, w は $\boxed{} + \boxed{}i$ を表す点を中心とする半径 $\boxed{}$ の円上を動く.

(2) z が複素数平面の原点 O を中心とする半径1の円上を動くとき, $w = (1-i)z - 2i$ によって定められる点 w はどんな図形を描くか.

〔6〕〔2003 大分大〕

複素数平面上の2点を $A(-1+i), B(2+i)$ とするとき

(1) 線分 AB を1辺とする正三角形 ABC の頂点 $C(\gamma)$ を表す複素数 γ を求めよ.

(2) 点 $P(z)$ が線分 AB 上を A から B まで動く. このとき複素数 iz^2 が表す点は, 複素数平面上でどのような図形をえがか図示せよ.

高3理系数学 標準問題演習 演習 19.複素数平面(3)

7 [I. 1999 名古屋市立大 II. 2000 岡山大]

I. 3つの複素数 $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -1$ の表す複素数平面上の点を

それぞれ $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ とする. 0 でない複素数 z に対し, $w = \frac{1}{z}$ によって w を

定める. z , w が表す複素数平面上の点をそれぞれ $P(z)$, $Q(w)$ とする.

- (1) P が線分 AB 上を動くとき, Q の描く曲線を複素数平面上に図示せよ.
- (2) P が三角形 ABC の3辺上を動くとき, Q の描く曲線を複素数平面上に図示せよ.

II. 原点を O とする複素数平面上で, 0 でない複素数 z , w の表す点をそれぞれ $P(z)$, $Q(w)$ とする. z に対して w を, O を始点とする半直線 $OP(z)$ 上に $Q(w)$ があり,

$|w| = \frac{2}{|z|}$ を満たすようにとる.

- (1) $w = \frac{2}{z}$ を示せ.
- (2) ± 2 , $\pm 2i$ の表す4点を頂点とする正方形の周上を点 $P(z)$ が動く. このとき, $Q(w)$ と $P(z)$ が一致する z を求めよ.
- (3) $P(z)$ が(2)の正方形の周上を動くとき, 点 $Q(w)$ の描く図形を求めて図示せよ.

8 [2016 弘前大]

2つの複素数 w , z が $w = \frac{iz}{z-2}$ を満たしているとする. ただし, i は虚数単位とする.

- (1) 複素数平面上で, 点 z が原点を中心とする半径2の円周上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか. ただし, $z \neq 2$ とする.
- (2) 複素数平面上で点 z が虚軸上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか.
- (3) 複素数平面上で点 w が実軸上を動くとき, 点 z はどのような図形を描くか.

9 [三重大]

i を虚数単位とする.

(1) 等式 $2 \left| z - \frac{i}{3} \right| = \left| z - \frac{4i}{3} \right|$ を満たす複素数 z を極形式で表せ.

(2) 0 でない複素数 z が(1)の等式を満たしながら変化するとき, 複素数 $z + \frac{1}{z}$ は, 複素数平面上でどのような図形を描くか. その概形をかけ.

(3) 0 でない複素数 w が $|w-1| = |w-i|$ を満たしながら変化するとき, 複素数 $w + \frac{1}{w}$ は, 複素数平面上でどのような図形を描くか. その概形をかけ.