

高3数学 標準問題演習 10. 数列

1 [2008 早稲田大]

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は、初項 a 、公差 d の等差数列であり、 $a_3=12$ かつ $S_8>0, S_9\leq 0$ を満たす。ただし、 $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$ である。

- (1) 公差 d がとる値の範囲を求めよ。
- (2) a_n ($n>3$) がとる値の範囲を、 n を用いて表せ。
- (3) $a_n>0, a_{n+1}\leq 0$ となる n の値を求めよ。
- (4) S_n が最大となるときの n の値をすべて求めよ。また、そのときの S_n を d の式で表せ。

2 [2019 大阪工業大]

$\{a_n\}$ を初項 3、公比 3 の等比数列とし、 $\{b_n\}$ を初項 5、公差 4 の等差数列とする。 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n=^{\text{ア}}\boxed{}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) であり、 $\{b_n\}$ の一般項は、 $b_n=^{\text{イ}}\boxed{}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) である。また、 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通して含まれる数を小さいものから順に並べた数列を $\{c_n\}$ とすると、 $c_1=^{\text{ウ}}\boxed{}$ であり、 $\{c_n\}$ の一般項は、 $c_n=^{\text{エ}}\boxed{}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) である。

3 [大分大]

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-64=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつ。それらの解はある並べ方をすると等比数列になり、別の並べ方をすると等差数列になる。

- (1) 3 つの解の積を求めよ。
- (2) 3 つの解を求めよ。

4 [2014 岐阜薬科大]

異なる n 個の整数 $1, 2, 3, \dots, n$ の中から重複を許して 2 個の整数を選び、すべての組合せについて、2 数の和および積をたし合わせたものをそれぞれ $S(n), T(n)$ とする。 $n\geq 2$ であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $S(3), T(3)$ を求めよ。
- (2) $S(n), T(n)$ を n の式で表せ。

高3数学 標準問題演習 10. 数列

5 [2011 信州大]

3つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ は、次の4つの条件を満たすとする。

- (a) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = 4$, $y_1 = c$, $y_2 = a$, $y_3 = b$
- (b) $\{y_n\}$ は $\{x_n\}$ の階差数列である。
- (c) $\{z_n\}$ は $\{y_n\}$ の階差数列である。
- (d) $\{z_n\}$ は等差数列である。

このとき、数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ の一般項を求めよ。

6 [2015 早稲田大]

(1) 数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次の関係を満たしている。

$$\sum_{k=1}^n \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}} a_k = -\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)$$

a_n を n を用いて表せ。

(2) (ア) 次の和 S を求めよ。

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

(イ) (1) の a_n に対して、 $n \geq 2$ のとき、和 $Q = \sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

7 [2004 同志社大]

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = n \cdot 3^{n-1}, \quad b_n = n(n+1) \cdot 3^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とするとき

$$S_n - cS_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} - 3a_n$$

を満たす定数 c は $c = \text{ア}$ である。 S_n を n を用いて表すと $S_n = \text{イ}$ となる。

したがって、 $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ も同様に計算し n を用いて表すと $T_n = \text{ウ}$ となる。

ゆえに $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot 3^{k-1} = \text{エ}$ となる。

高3数学 標準問題演習 10. 数列

8 [1996 京都産業大]

x, y, z および n を 0 または正の整数とする.

(1) 不等式 $x + y \leq 3$ を満たす組 (x, y) の個数は ア であり, 不等式 $x + y \leq n$ を

満たす組 (x, y) の個数は イ である. また, 不等式 $x + y + z \leq n$ を満たす組

(x, y, z) の個数は ウ である.

(2) 不等式 $\frac{x}{3} + y \leq n$ を満たす組 (x, y) の個数を求めよ.

9 [2007 中央大]

有理数列

$$(*) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $(*)$ の $\frac{37}{50}$ は第何項になるか.

(2) 数列 $(*)$ の第 1000 項の数を求めよ.

(3) 初項から第 1000 項までの和を求めよ.

10 [1998 早稲田大]

(1) k, n を正の整数とし,

$$S_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

$$T_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}$$

とする. このとき, 等式 $S_k = T_n$ が成立する k を n で表せ. また, その等式を n に関する数学的帰納法によって証明せよ.

(2) n を正の整数とすると, S_n の最大値と最小値を求めよ. また, その理由を示せ.

高3数学 標準問題演習 10. 数列

11 [2018 香川大]

2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とする。

- (1) $\alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3$ の値をそれぞれ求めよ。
- (2) すべての自然数 n に対して、 $\alpha^n + \beta^n$ は偶数になることを示せ。
- (3) $\alpha > \beta$ とする。このとき、すべての自然数 n に対して、 $[\alpha^n]$ は奇数になることを示せ。
ただし、 $[\alpha^n]$ は α^n 以下の最大の整数を表す。

12 [2010 京都大]

数列 $\{a_n\}$ は、すべての正の整数 n に対して $0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^n a_k$ を満たしているとする。このとき、すべての n に対して $a_n = 0$ であることを示せ。