

高3理系数学 標準問題演習 演習 9.積分(1)

1 [I . 2019 京都大 II . 2016 長崎大]

I . 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$$

II . 定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ について, I_1, I_2, I_3 を求めよ。

2 [I . 名古屋市大 II . 横浜国立大 III . 大阪府立大 IV . 小樽商科大 V . 大阪教育大]

I . 式 $x_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$ ($n=0, 1, 2, \dots$) によって定義される数列 $\{x_n\}$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) 漸化式 $x_n = \frac{n-1}{n} x_{n-2}$ ($n=2, 3, 4, \dots$) を示せ。
- (2) $x_n \cdot x_{n-1}$ の値を求めよ。
- (3) 不等式 $x_n > x_{n+1}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2$ を求めよ。

II . 定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ($n=1, 2, 3, \dots$) について, 次の問いに答えよ。

- (1) I_1, I_2 を求めよ。
- (2) I_{n+2} を I_n で表せ。
- (3) I_6 を求めよ。

III . 自然数 n に対して, $S_n = \int_1^e (\log x)^n dx$ とする。

- (1) S_1 を求めよ。
- (2) S_{n+1} を S_n と n の式で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n$ を求めよ。

高3理系数学 標準問題演習 演習 9.積分(1)

IV. $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$) とする.

- (1) I_0 を求めよ.
- (2) $n \geq 1$ のとき, I_n を I_{n-1} で表せ.
- (3) $a_n = e(n! - I_n)$ において, a_n の漸化式を求めよ.
- (4) I_5 を求めよ.

V. 次の等式を証明せよ。ただし, n, m は自然数, α, β は実数とする。

- (1) $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$
- (2) $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta) dx = -\frac{n!}{(n+2)!}(\beta-\alpha)^{n+2}$
- (3) $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta)^m dx = (-1)^m \frac{n!m!}{(n+m+1)!}(\beta-\alpha)^{n+m+1}$

□[2002 高知女子大]

n を自然数とし, $I_n = \int_n^{n+1} e^{-x} \sin \pi x dx$, $J_n = \int_n^{n+1} e^{-x} \cos \pi x dx$ とおく.

- (1) I_n と J_n を求めよ.
- (2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} J_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$ のそれぞれの和を求めよ.

□[(1) 近畿大 (2) 東京理科大 (3), (4) 京都大 (5) 東京大]

(1) $\int_0^3 \sqrt{6x-x^2} dx$ を求めよ.

(2) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1} dx$$

(3) 定積分 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx$ の値を求めよ.

(5) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

高3理系数学 標準問題演習 演習 9.積分(1) 確認問題

5 [2020 芝浦工業大]

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + \cos x)^3 dx$ を求めると $\boxed{}$ である。

6 [2020 岡山理科大]

$f(x)$ は微分可能な関数であるとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = x \cos x$ であるとき、導関数 $f'(x)$ を求め、 $f'(x)$ が偶関数であることを示せ。
- (2) $f(x)$ が奇関数であるとき、導関数 $f'(x)$ が偶関数であることを示せ。
- (3) $f(x)$ が奇関数であるとき、定積分 $\int_0^x f(t) dt$ が偶関数であることを示せ。

7 [2023 東京理科大]

$\log$ を自然対数とする。このとき、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5 + 4\sin x + 3\cos x} dx = \frac{\overset{\text{ア}}{\boxed{}}}{\underset{\text{イ}}{\boxed{}}}$$

であり、

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx = \log \left(\underset{\text{ウ}}{\boxed{}} + \frac{\overset{\text{エ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{オ}}{\boxed{}}} \sqrt{\underset{\text{カ}}{\boxed{}}} \right)$$

である。また、

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\overset{\text{キ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{ク}}{\boxed{}}} \pi - \frac{\overset{\text{ケ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{コ}}{\boxed{}}} \log 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\overset{\text{サ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{シ}}{\boxed{}}} \pi + \frac{\overset{\text{ス}}{\boxed{}}}{\underset{\text{セ}}{\boxed{}}} \log 2$$

である。

8 [2014 静岡大]

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x} dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos x + \sin x} dx \text{ とする。}$$

- (1) $x = \frac{\pi}{2} - t$ において置換積分法を用いることで、 $I = J$ を示せ。
- (2) $I + J$ の値を求めよ。
- (3) I と J の値を求めよ。

9 [2017 山口大]

$f(x)$ を閉区間 $[0, 1]$ で連続な関数とする。

- (1) $x = \pi - t$ において等式 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(\sin t) dt$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) 等式 $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ が成り立つことを証明せよ。
- (3) 定積分 $\int_0^{\pi} x \sin^3 x dx$ を求めよ。

10 [I. 電気通信大 琉球大 II. 福島大 III. 愛媛大 IV. 福岡大]

I. 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\pi} |\sin x + \sqrt{3} \cos x| dx \qquad (2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} |3 \sin x + \cos x| dx$$

II. 実数 t に対して、 $f(t) = \int_0^1 |e^{-x} - t| dx$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $f(t)$ を求めよ。
- (2) $f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

III. k を正の実数とし、 $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - kx| dx$ とおく。

- (1) 方程式 $\cos x = kx$ は区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ にただ 1 つの解をもつことを示せ。
- (2) (1) の解を α とする。 S を α を用いて表せ。
- (3) $k > 0$ において、 S を最小にする k の値を求めよ。

表題

IV. x を, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とし, $I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |t-x| \sin t \, dt$ とおく。

- (1) 関数 $I(x)$ の導関数 $I'(x)$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ を求め, $I(x)$ を最小にする x の値を求めよ。
- (2) $I(x)$ の最小値を求めよ。

□11 [I. 1998 信州大 II. 1998 東北大]

I. a を正の定数とする. 任意の実数 x に対して, $x = a \tan y$ を満たす y

$\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ を対応させる関数を $y = f(x)$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(a)$ を求めよ.
- (2) $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ および $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ を x の式で表せ.
- (3) $\int_0^a f(x) \, dx$ を求めよ.

II. (1) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ のとき, $y = f(x)$ の逆関数 $y = g(x)$ を求めよ.

(2) (1) の $f(x), g(x)$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) \, dx = b f(b) - a f(a)$$

表題

12 [I . 2000 神戸大 II . 2000 芝浦工業大]

I . 関数 $f(x) = \frac{1}{x^3(1-x)}$ について、次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{b}{1-x}$ において、定数 a_1, a_2, a_3, b を求めよ.

(2) 不定積分 $\int f(x)dx$ を求めよ.

(3) 同様にして、不定積分 $\int \frac{dx}{x^p(1-x)}$ ($p=1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

II . $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx = \log \boxed{} + C$ (C は積分定数)

13 [2006 北海道大]

(1) 整数 m, n に対して、積分 $I_{m, n} = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して、積分 $J_n = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cos kx \right)^2 dx$ を求めよ.

14 [I . 1996 信州大 II . 2011 富山大]

I . $f(x) = x^2 + ax + b$ とする. 任意の実数 p, q に対して、次の等式が成り立つような実数 a, b を求めよ. $\int_0^\pi (p \cos x + q \sin x) f(x) dx = 0$

II . (1) 定積分 $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$ と $J = \int_0^\pi e^x \sin x dx$ の値を求めよ.

(2) 実数 a, b が $\int_0^\pi (a \cos x + b \sin x)^2 dx = 1$ を満たしながら動くとき、

$\int_0^\pi (e^x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$ の最大値を求めよ.

表題

15 [2021 岩手大]

定数 a が $0 < a < 1$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) 不定積分 $\int \log_a x dx$ を求めよ。
- (2) 不定積分 $\int x^2 \log_a x dx$ を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 |x \log_a x| a^{|\log_a x|} dx$ を求めよ。

16 [(1) 1996 広島市立大 (2) 2014 横浜国立大]

- (1) 不定積分 $\int \sin \sqrt{x} dx$ を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \cos x^2 dx$ を求めよ。

17 [I. 2007 富山県立大 II. 2008 愛知教育大]

I. 関数 $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について

- (1) $f(x) = 0$ となる x の値を求めよ。
- (2) $f(x) \geq 0$ となる x の値の範囲を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^{\pi} |f(x)| dx$ の値を求めよ。

II. (1) 実数 α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) が $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ を満たすとき、 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ の値を求めよ。

- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - 2 \cos x| dx$ の値を求めよ。