

1.3 対称式・恒等式

(1) 対称式

どの 2 文字を入れ替えてももとの式と同じになる式を対称式という。

例えば $x+y, xy, x^2+y^2$ は, x と y を入れ替えても

$$y+x=x+y, yx=xy, y^2+x^2=x^2+y^2$$

となり, もとの式と同じになるので対称式である。

$x-y$ は, x と y を入れ替えると $y-x=-x+y$ となり, もとの式と同じにはならないので, 対称式ではない (ちなみに, 文字を入れ替えて $-(\text{もとの式})$ となるような式を交代式という)。

「どの 2 文字を」というのは, 文字が 3 文字以上になったとき, 例えば $x+y+z$ は, x と y , y と z , z と x のどれを入れ替えても, もとの式と同じになるので対称式である。それに対して, $xy+z^2$ は, x と y を入れ替えてももとの式と同じになるが, y と z を入れ替えるともとの式と同じにならないので, 対称式ではない。

対称式の中でも特に,

文字が 2 種類のときは, $x+y$ (1 次), xy (2 次)

文字が 3 種類のときは, $x+y+z$ (1 次), $xy+yz+zx$ (2 次), xyz (3 次) を基本対称式という。対称式には, 次の重要な性質がある。

対称式の基本定理

すべての対称式は, 基本対称式のみで 1 通りに表すことができる

例えば,

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

のように, 対称式は, 基本対称式のみで 1 通りに表せる。証明は, 現段階ではできなくてよい。

例 1

(1) 実数 x, y が $x+y=3, xy=-2$ を満たすとき, $x^2+y^2, x^3+y^3, x^5+y^5$ の値を求めよ

(2) $a+b=2\sqrt{2}, a^2+b^2=10$ のとき, ab, a^3+b^3, a^5+b^5 の値を求めよ。

解説

$$(1) x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 3^2 - 2 \cdot (-2) = 13$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 = 45$$

別解

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 3 \cdot \{13 - (-2)\} = 45$$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2)^2 + (y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 \\ &= 13^2 - 2 \cdot (-2)^2 = 161 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x + y)(x^4 + y^4) - xy(x^3 + y^3) \\ &= 3 \cdot 161 - (-2) \cdot 45 = 573 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - (x^2y^3 + x^3y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - (xy)^2(x + y) \\ &= 13 \cdot 45 - (-2)^2 \cdot 3 = 573 \end{aligned}$$

$$(2) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ より}$$

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{(2\sqrt{2})^2 - 10}{2} = -1$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (2\sqrt{2})^3 - 3 \cdot (-1) \cdot (2\sqrt{2}) = 22\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (ab)^2(a + b) \\ &= 22\sqrt{2} \cdot 10 - (-1)^2 \cdot 2\sqrt{2} = 218\sqrt{2} \end{aligned}$$

例2

$$(1) 0 < x < 1 \text{ かつ } x + \frac{1}{x} = 7 \text{ を満たす実数 } x \text{ に対して, } x^3 + \frac{1}{x^3} \text{ の値は}$$

$$^{\circ} \boxed{} \text{ であり, } \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ の値は } ^{\circ} \boxed{} \text{ である。}$$

$$(2) a > 1 \text{ とする。} a^2 + \frac{1}{a^2} = 7 \text{ のとき, } a - \frac{1}{a}, a^2 - \frac{1}{a^2}, a^3 + \frac{1}{a^3}, a^4 + \frac{1}{a^4} \text{ の値を求めよ。}$$

$$(3) \text{ 実数 } \alpha \text{ が } \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \text{ を満たすとき, } \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = ^{\circ} \boxed{} \text{ であり,}$$

$$\alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5} = ^{\circ} \boxed{} \text{ である。}$$

解説

$$(1) x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 7^3 - 3 \cdot 7 = {}^{\text{r}}322$$

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} - 2 = 5$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき, } \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} < 0 \text{ より}$$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = {}^{\text{r}} - \sqrt{5}$$

$$(2) \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = 7 - 2 = 5$$

$$a > 1 \text{ であるから, } a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a} > 0 \text{ より}$$

$$a - \frac{1}{a} = \sqrt{5}$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9,$$

$$a > 1 \text{ であるから, } a + \frac{1}{a} > 0 \text{ より, } a + \frac{1}{a} = 3$$

よって

$$a^2 - \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a - \frac{1}{a}\right) = 3\sqrt{5}$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = {}^{\text{r}}18$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$$

$$\alpha = 0 \text{ は } \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \text{ を満たさないから, } \alpha \neq 0 \text{ より}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$

$$\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 3^3 - 3 \times 3 = {}^{\text{r}}18$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$\alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5} = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 7 \times 18 - 3 = {}^{\text{r}}123$$

例3

(1) a, b, c が $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=5, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ を満たすとき, $ab+bc+ca, a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ。

(2) $x+y+z=4, xy+yz+zx=2, xyz=5$ のとき, $x^2+y^2+z^2, x^4+y^4+z^4$ の値をそれぞれ求めよ。

解説

$$(1) (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \text{ より}$$

$$1^2 = 5 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -2$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \text{ より}$$

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} = 1$$

$$abc = ab+bc+ca = -2$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ より}$$

$$a^3+b^3+c^3-3 \cdot (-2) = 1 \cdot \{5 - (-2)\}$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3 = 1$$

$$(2) x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$= 4^2 - 2 \cdot 2 = 12$$

$$x^4+y^4+z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

ここで

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)$$

$$= 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 = -36$$

より

$$x^4+y^4+z^4 = 12^2 - 2(-36) = 216$$

(2) 恒等式

等式(等号で結ばれた式)には2種類ある。まず, 含まれている各文字にある値を代入したときにだけ成り立つ等式を**方程式**という。それに対して, 各文字にどのような値を代入しても, 両辺の値が存在する限り常に成り立つ等式を, それらの文字についての**恒等式**という。例えば, $2x+3=5$ は, $x=1$ のときだけ成り立つので方程式である。それに対して, $(x+1)^2=x^2+2x+1$ は, x にどんな値を代入しても成り立つの

で恒等式である。

一般に、式の変形によって導かれる等式は恒等式である。例えば、整式の展開や因数分解の公式における等式は、すべて恒等式である。

$ax+b=0$ が x についての恒等式である

$$\Leftrightarrow a=0, b=0$$

→ について

$ax+b=0 \cdots \textcircled{1}$ が x についての恒等式であり、どんな x に対しても等号が成り立つから、 $x=0, x=1$ についても等号が成り立つ。

$x=0$ のとき $\textcircled{1}$ は、 $b=0 \cdots \textcircled{2}$

$x=1$ のとき $\textcircled{1}$ は、 $a+b=0 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ より、 $a=0, b=0$

← については明らか

$ax+b=a'x+b'$ が x についての恒等式である

$$\Leftrightarrow a=a', b=b'$$

移項して

$(a-a')x+b-b'=0$ が x についての恒等式

前の結果を利用して、

$$\Leftrightarrow a-a'=0, b-b'=0$$

$$\Leftrightarrow a=a', b=b'$$

となる。つまり、 $ax+b=a'x+b'$ が x についての恒等式であれば、係数比較をしてもよい。逆に、係数が同じになるしかない。当たり前のことのようにも思えるが、係数比較は、どんなときでも安易にしてよいものではない。しかし、この場合は係数比較してよいことが保証されたことになる。

$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である

$$\Leftrightarrow a=0, b=0, c=0$$

→ について

$ax^2+bx+c=0 \cdots \textcircled{1}$ が x についての恒等式なので、 $x=0, x=1, x=-1$ について等号が成り立つ

$x=0$ のとき ① は, $c=0$

$x=1$ のとき ① は, $a+b=0$

$x=-1$ のとき ① は, $a-b=0$

これらより, $a=0, b=0, c=0$

← については明らか

また, この結果を利用すれば, 次が成り立ちます。

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である

$\Leftrightarrow a=a', b=b', c=c'$

この定理は, 係数比較をしてよいことを保証している。これは, 両辺が 3 次式でも, 4 次式でも, 何次式でも成り立つ。章末の(発展)を参照。

次に, 多変数の場合です。

$ax+by+c=0$ が x, y についての恒等式である

$\Leftrightarrow a=0, b=0, c=0$

x について整理して, $ax+(by+c)=0$

x についての恒等式であるから前の結果より

$\Leftrightarrow a=0, by+c=0$

y についての恒等式であるから前の結果より

$\Leftrightarrow a=0, b=0, c=0$

また, この結果を利用すれば次が成り立つ。

$ax+by+c=a'x+b'y+c'$ が x, y についての恒等式である

$\Leftrightarrow a=a', b=b', c=c'$

恒等式の係数決定問題は,

[1] 係数比較法

[2] 数値代入法

[3] 置き換え

[4] 微分を利用)

の 3 つ(4 つ)がある。どの方法でもできるが, 等式の形によってうまく使い分けられるようにしておいた方がよい。

例3

(1) $(k+1)x+(k-1)y-5k+1=0$ がすべての実数 k に対して成立するとき、 x, y の値を求めよ。

(2) 等式 $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=ax(x-1)(x+1)+bx(x-1)+cx+d$ が x についての恒等式であるとき、定数 a, b, c, d の値を求めよ。

(3) すべての x に対して、

$$x^3-3x^2+7=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$$

となる数 a, b, c, d を求めよ。

解説

(1) $(k+1)x+(k-1)y-5k+1=0$ を k について整理すると

$$(x+y-5)k+(x-y+1)=0$$

この等式がすべての実数 k に対して成立するとき

$$x+y-5=0, \quad x-y+1=0$$

$$\therefore x=2, \quad y=3$$

(2) $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=ax(x-1)(x+1)+bx(x-1)+cx+d \cdots \textcircled{1}$

① は恒等式より、どのような x についても等号が成り立つから

$x=0, 1, -1, -2$ で成り立つ

$x=0$ のとき、 $9=d$

$x=1$ のとき、 $36=c+d$

$x=-1$ のとき、 $0=2b-c+d$

$x=-2$ のとき、 $-9=-6a+6b-2c+d$

よって、 $a=3, b=9, c=27, d=9$

このとき、左辺と右辺の係数はすべて等しいので、①は恒等式である

注 この場合、 $x=0, 1, -1, -2$ で成り立つときの a, b, c, d の値を出したに過ぎないので、逆、すなわち、すべての x で等号が成り立つことを言わなければならない。一般に、恒等式について次の定理が成り立ちます。

$P_1(x), P_2(x)$ を n 次式とする

(1) $P_1(x)=P_2(x)$ がどんな x についても成り立つ

(2) $P_1(x)=P_2(x)$ が異なる $n+1$ 個の x について成り立つ

(3) $P_1(x)$ と $P_2(x)$ の係数はすべて等しい

これら 3 つは、すべて同値である。

証明は章末の **発展** を参照。この定理を利用すると、

$x=0, 1, -1, -2$ のときの a, b, c, d の値を出した後に、

「左辺と右辺は3次の整式であり、 x の異なる4つの値に対して等しいから、①は x についての恒等式である」と書いてもよい。

(3) $x-2=X$ とおくと、 $x=X+2$

よって、与えられた等式は

$$(X+2)^3 - 3(X+2)^2 + 7 = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$X^3 + 3X^2 + 3 = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

X についての恒等式より

$$a=1, b=3, c=0, d=3$$

別解 微分を利用(今はできなくてもよい)。

$$x^3 - 3x^2 + 7 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$$

両辺 x で微分して、

$$3x^2 - 6x = 3a(x-2)^2 + 2b(x-2) + c \cdots \textcircled{1}$$

両辺 x で微分して、

$$6x - 6 = 6a(x-2) + 2b \cdots \textcircled{2}$$

両辺 x で微分して、

$$6 = 6a \cdots \textcircled{3}$$

③より、 $a=1$

②に $x=2$ を代入して、 $b=3$

①に $x=2$ を代入して、 $c=0$

与式に $x=2$ を代入して、 $d=3$

このとき、左辺と右辺の係数はすべて等しいので、与式は恒等式である

例4

整式 $f(x)$ について、恒等式 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ が成り立つとする。

(1) $f(0), f(1), f(2)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の次数を求めよ。

(3) $f(x)$ を決定せよ。

解説

(1) $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$

$x=0$ を代入すると、 $f(0)=0$

$x=1$ を代入すると、 $f(1)=f(2)$

$x=-1$ を代入すると、 $f(1)=-f(0)$ より、

$$f(0)=f(1)=f(2)=0$$

(2) $f(x)$ を n 次式とすると,

(i) $n=0$ のとき

左辺は 0 次, 右辺は 4 次より不適

(ii) $n=1$ のとき

恒等式となるためには, $f(x)=2x+k$ (k は定数) と表せる必要があるが,

$f(0)=f(1)=f(2)=0$ を満たす k は存在しないので不適

(iii) $n \geq 2$ のとき

左辺は $2n$ 次, 右辺は $n+3$ 次より

$$2n = n + 3 \quad \therefore n = 3$$

(3) (1), (2) より

$$f(x) = ax(x-1)(x-2)$$

とおける

$$f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2 \text{ より}$$

$$ax^2(x^2-1)(x^2-2) = ax^4(x+1)(x-1) - 2x^4 + 2x^2$$

$$ax^2(x^4-3x^2+2) = ax^4(x^2-1) - 2x^4 + 2x^2$$

係数を比較して,

$$-3a = -a - 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$2a = 2 \cdots \textcircled{2}$$

②より, $a=1$

これは①も満たす

よって

$$f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

補1

(1) $a+b=4$, $ab=2$, $c+d=5$, $cd=3$ のとき, a^2+b^2 , $ac+bd+ad+bc$, $(ac+bd)(ad+bc)$ の値を求めよ.

(2) $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=1$ のとき, $ad-bc$, a^2+d^2 , b^2+c^2 の値をそれぞれ求めよ.

解説

$$(1) a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\cdot 2=12$$

$$ac+bd+ad+bc=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)=4\cdot 5=20$$

$$\begin{aligned}(ac+bd)(ad+bc) &= a^2cd+abc^2+abd^2+b^2cd \\ &= cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2) \\ &= cd(a^2+b^2)+ab\{(c+d)^2-2cd\} \\ &= 3\cdot 12+2(5^2-2\cdot 3)=74\end{aligned}$$

$$(2) a^2+b^2=1 \cdots \textcircled{1}, \quad c^2+d^2=1 \cdots \textcircled{2} \quad \text{とおく}$$

$$(ac+bd)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2=1$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=1$$

辺々引いて

$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2=0$$

$$\therefore ad-bc=0 \cdots \textcircled{3}$$

(i) $b=0$ のとき

$$\textcircled{1} \text{より}, \quad a^2=1 \quad \textcircled{3} \text{より}, \quad d=0 \quad \textcircled{2} \text{より}, \quad c^2=1$$

$$\text{よって}, \quad a^2+d^2=b^2+c^2=1$$

(ii) $d=0$ のとき

$$\textcircled{2} \text{より}, \quad c^2=1 \quad \textcircled{3} \text{より}, \quad b=0 \quad \textcircled{1} \text{より}, \quad a^2=1$$

$$\text{よって}, \quad a^2+d^2=b^2+c^2=1$$

(iii) $b \neq 0$ かつ $d \neq 0$ のとき

$$\textcircled{3} \text{より}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad \text{とおくと}, \quad a=bk, \quad c=dk$$

$$\textcircled{1} \text{から}, \quad b^2 = \frac{1}{k^2+1}, \quad \textcircled{2} \text{から}, \quad d^2 = \frac{1}{k^2+1} \quad \text{より}$$

$$a^2+d^2=b^2k^2+\frac{1}{k^2+1}=\frac{k^2+1}{k^2+1}=1,$$

$$b^2+c^2=\frac{1}{k^2+1}+d^2k^2=\frac{k^2+1}{k^2+1}=1$$

(i)~(iii)より

$$a^2 + d^2 = b^2 + c^2 = 1$$

補2

$x^4 - ax^3 + bx^2 - 12x + 9$ が x の完全平方式となるように a, b の値を定めよ.

解説

与式が x の完全平方式となるとき

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - 12x + 9 = (x^2 + cx + d)^2$$

とおける.

$$(x^2 + cx + d)^2 = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2 \text{ であり}$$

これが x についての恒等式であるから

$$-a = 2c, b = c^2 + 2d, -12 = 2cd, d^2 = 9$$

最後の式より, $d = \pm 3$

$$d = 3 \text{ のとき, } c = -2, a = 4, b = 10$$

$$d = -3 \text{ のとき, } c = 2, a = -4, b = -2$$

よって

$$(a, b) = (4, 10), (-4, -2)$$

補3

多項式 $f(x)$ について, 次の条件 (A), (B), (C) を考える。

$$(A) \quad x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad (B) \quad f(1-x) = f(x) \quad (C) \quad f(1) = 1$$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 条件 (A) を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件 (A), (B), (C) をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

解説

(1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) とおくと

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x^{n-4}} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-5}} + \cdots + a_0 x^4$$

この右辺は, $n \geq 5$ のとき多項式にならない

一方, 条件 (A) から $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)$ は多項式であるから

条件 (A) を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下である

(2) $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ とおくと

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

条件 (A) より

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

この両辺の各項の係数を比較すると, $a_0 = a_4$, $a_1 = a_3$

このとき

$$f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件 (B) において, $x=1$, $x=2$ を代入すると

$$f(0) = f(1), \quad f(-1) = f(2)$$

これと条件 (C) より

$$a_0 = 1, \quad 2a_0 + 2a_1 + a_2 = 1, \quad 2a_0 - 2a_1 + a_2 = 17a_0 + 10a_1 + 4a_2$$

$$\therefore a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 3$$

①に代入して

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

このとき

$$\begin{aligned} f(1-x) &= (1-x)^4 - 2(1-x)^3 + 3(1-x)^2 - 2(1-x) + 1 \\ &= (1-4x+6x^2-4x^3+x^4) - 2(1-3x+3x^2-x^3) \\ &\quad + 3(1-2x+x^2) - 2(1-x) + 1 \\ &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

となり, 条件 (B) を満たす

よって

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

発展 n 次の恒等式の係数比較 (一致の定理)

$P_1(x), P_2(x)$ を n 次式とする

(1) $P_1(x) = P_2(x)$ がどんな x についても成り立つ

(2) $P_1(x) = P_2(x)$ が異なる $n+1$ 個の x について成り立つ

(3) $P_1(x)$ と $P_2(x)$ の係数はすべて等しい

これら 3 つは、すべて同値である。

(1) $\rightarrow$ (2), (2) $\rightarrow$ (3), (3) $\rightarrow$ (1) が示すことができれば、

右の図のように、サイクリック(環的)につなげることができ、

(2) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) であるから、(2) $\rightarrow$ (1) も、

同様に、(3) $\rightarrow$ (2), (1) $\rightarrow$ (3) も示せたことになり、

(1) $\Leftrightarrow$ (2), (2) $\Leftrightarrow$ (3), (3) $\Leftrightarrow$ (1) が示せたことになる。

(1) $\rightarrow$ (2), (3) $\rightarrow$ (1) は明らかなので、(2) $\rightarrow$ (3) を示す。

移項して $P_1(x) - P_2(x) = 0$ とし、 $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$ とおくと

$P(x)$ は、最大でも n 次式であり、

$P(x) = 0$ が異なる n 個の x の値 $a_1, a_2, \dots, a_n$ で成り立つとすると、

因数定理より

$$P(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

とおける。いま、異なる $n+1$ 個の値について $P(x) = 0$ が成り立つから、

$a_1, a_2, \dots, a_n$ のすべてと異なる値 a_{n+1} についても $P(x) = 0$ が成り立つ

ので、

$$P(a_{n+1}) = a(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2) \cdots (a_{n+1} - a_n) = 0$$

ここで、 $a_{n+1} - a_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) であるから、 $a = 0$

よって $P(x) = 0$ となり

$$P_1(x) - P_2(x) = 0$$

$$\therefore P_1(x) = P_2(x)$$

(1) $\rightarrow$ (3) を示すのが難しいので、(2) をクッションとして証明している。

これらが示せたことによって、

(1) は、 $P_1(x) = P_2(x)$ が x についての恒等式であるということなので、

n 次の恒等式の係数決定問題も、係数比較でできること、

$P_1(x) = P_2(x)$ が異なる $n+1$ 個の x について成り立つならば、

$P_1(x) = P_2(x)$ は恒等式であるなど、重要なことが示せた。

