

理系標準問題演習 1. 極限

II

$$\begin{aligned} \text{I. } S_n &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{3} n \{ 2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3 \} \\ &= \frac{4}{3} n^3 - \frac{1}{3} n \end{aligned}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} n - \frac{1}{3n} \right) = \infty$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3n^2} \right) = \frac{4}{3}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3n} - \frac{1}{3n^3} \right) = 0$$

II. d) $a_1 = S_1 = 9$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$= 4 \left\{ \frac{n^3 - (n-1)^3}{3n^2 + 3n + 1} + 6 \frac{n^2 - (n-1)^2}{2n-1} \right\} - \{ n - (n-1) \}$$

$$= (2n^2 - 3) \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = 1 \text{ と } 2 \text{ と } 3 \text{ と } 4 \text{ と } 5 \text{ と } 6 \text{ と } 7 \text{ と } 8 \text{ と } 9$$

$$a_n = (2n^2 - 3) \quad (n \geq 1)$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{12(n+1)^2 - 3} - \sqrt{12n^2 - 3})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12(n+1)^2 - 3 - (12n^2 - 3)}{\sqrt{12(n+1)^2 - 3} + \sqrt{12n^2 - 3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n + 12}{\sqrt{12(n+1)^2 - 3} + \sqrt{12n^2 - 3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24 + \frac{12}{n}}{\sqrt{12(1 + \frac{1}{n})^2 - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{12 - \frac{3}{n^2}}}$$

$$= \frac{24}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f) T_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (48k^2 - 3) = 8n(n+1)(2n+1) - 3n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n(n+1)(2n+1) - 3n}{4n^3 + 6n^2 - n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}) - \frac{3}{n}}{4 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}} = 4$$

$$e) U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3(4k^2 - 1)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1}{6}$$

$$\text{III. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^6} - n^2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + n^6) - n^6}{\sqrt[3]{(n^3 + n^6)^2} + \sqrt[3]{n^3 + n^6} + n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n^3})^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} + 1} = -\frac{1}{3}$$

<point>

1. 極限, 不定形, 変数

2

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n-1}}{r^n + 3^{n-1}}$$

i) $0 < r < 3$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{r}{3})^{n-1} - 9}{r(\frac{r}{3})^{n-1} + 1} = -9$$

ii) $r = 3$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}(1-9)}{3^{n-1}(3+1)} = -2$$

iii) $r > 3$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r} - 3(\frac{3}{r})^n}{1 + \frac{1}{r}(\frac{3}{r})^{n-1}} = \frac{1}{r}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$$

i) $0 < a < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = 1$

ii) $a = 1$ のとき

iii) $a > 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{a^n})^{\frac{1}{n}} = a$

<point>

1. 極限, 不定形, 変数

[3]

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(\frac{n+1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= \log e = 1 \end{aligned}$$

<point>

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ (eの定義)

[4]

$$\begin{aligned} (1) a(a^n)^n &= a \left(\frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{a} \right) = b^n + \frac{a}{b^n} a^n \\ a(a^n)^n - b^n &= \frac{a}{b^n} a^n > 0 \quad \therefore b^n < a(a^n)^n \\ 2b^n a(a^n)^n &= b^n + \frac{a}{b^n} a^n = \frac{1}{b^n} (b^{n+1} + a^{n+1}) > 0 \\ &\therefore a(a^n)^n < 2b^n \end{aligned}$$

(2) $0 < a < b$ より、左辺の2つは正で、

$$\begin{aligned} n \log b &< n \log a^n + \log a < n \log b + \log 2 \\ n \log b - \log a &< n \log a^n < n \log b + \log 2 - \log a \\ \log b - \frac{\log a}{n} &< \log a^n < \log b + \frac{\log 2}{n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log b - \frac{\log a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log b + \frac{\log \frac{2}{a}}{n} \right) = \log b \text{ であるから}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a^n = \log b$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = b$$

<point>

1. はさみうちの原理

[5]

(1) 自然数 m の対数 k とすると

$$10^{k-1} \leq m < 10^k$$

$$k-1 \leq \log_{10} m < k$$

$$k \leq \log_{10} m + 1 < k+1$$

$$\therefore k = \lfloor \log_{10} m + 1 \rfloor$$

$$(2) k_n = \lfloor \log_{10} 3^n + 1 \rfloor$$

$$k_n \leq \log_{10} 3^n + 1 < k_{n+1}$$

$$\log_{10} 3^n < k_n \leq \log_{10} 3^{n+1}$$

$$n \log_{10} 3 < k_n \leq (n+1) \log_{10} 3$$

$$\log_{10} 3 < \frac{k_n}{n} \leq \log_{10} 3 + \frac{1}{n}$$

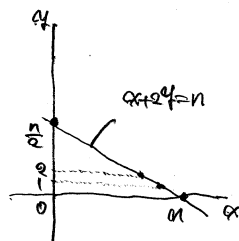
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log_{10} 3 + \frac{1}{n} \right) = \log_{10} 3 \text{ であるから}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = \log_{10} 3$$

[6]

$$(1) a_n = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1 & (n: \text{偶数}) \\ \frac{n-1}{2} & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$



(2) a_n の平均値 $\bar{a}$ と

$$a_k = k \quad (k=1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1) \text{ となる}$$

場合、その個数は $n/2 - 1$ 個

$$\begin{aligned} \bar{a}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (n - 2k - 1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (n - 2k - 1) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

また、 a_n の平均値 $\bar{a}$ と

$$a_k = k \quad (k=1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}) \text{ となる}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (n - 2k - 1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (n - 2k - 1) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (n-1) (n-3) \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0 \quad (n: \text{偶数} \text{ と } n: \text{奇数} \rightarrow 0 \text{ と } 1/2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{4} \quad (n: \text{偶数} \text{ と } n: \text{奇数} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ と } 1/3)$$

7

d) 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

第1群 第2群 第3群 第4群 ... とする

$a_n = k$ とするとき a_n は第 k 群の項である

第 k 群の最後の項は

$$1+2+\dots+k = \frac{1}{2}k(k+1) \text{ 項}$$

より $a_n = k$ とするとき

$$\frac{1}{2}(k-1)k+1 \leq n \leq \frac{1}{2}k(k+1) //$$

$n=100$ とする

$$(k-1)k+2 \leq 200 \leq k(k+1)$$

$$(9 \times 14 = 182, 14 \times 15 = 210) \text{ より } k=14$$

$$\text{よって } a_{100} = 14 //$$

e) 第13群の最後の項は

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91 \text{ 第91項}$$

より a_{100} は第14群の9番目

よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} a_n &= \sum_{k=1}^{13} k^2 + 14 \cdot 9 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 27 + 14 \cdot 9 \\ &= 63 \cdot 15 = 945 // \end{aligned}$$

$$3) 2+4+6+8+12+9 = 41 \text{ 11}$$

4) $a_n = k$ とするとき

$$\frac{1}{2}(k-1)k+1 \leq n \leq \frac{1}{2}k(k+1) //$$

$$\frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2}k(k+1)}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2}(k-1)k+1}}$$

$n \rightarrow \infty$ とすると $k \rightarrow \infty$ より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2}k(k+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2}(k-1)k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}}} = \sqrt{2}$$

で夹みはさむより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} //$$