

第1章 複素数平面

1.1 複素数平面(1)

(1) 複素数平面

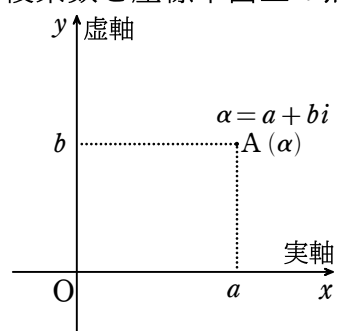
複素数は2つの実数 a, b と虚数単位 i を用いて $a + bi$ の形で表される数である。特に $b \neq 0$ のとき、 bi の形の複素数を純虚数という。

以下 $a + bi$ や $c + di$ などでは、 a, b, c, d は実数を表すこととする。

実数は数直線上の点で表される。ここでは、複素数を座標平面上の点で表すことを考える。

座標平面上で複素数 $\alpha = a + bi$ に対して点 (a, b) を対応させる。これにより、複素数と座標平面上の点は1対1に対応する。

複素数 $\alpha = a + bi$ を座標平面上の点 (a, b) で表したとき、この平面を複素数平面または複素平面という。



複素数平面上では、 x 軸を実軸、 y 軸を虚軸という。実軸上の点は実数を表し、虚軸上の O と異なる点は純虚数を表す。

複素数平面上で複素数 α を表す点 A を $A(\alpha)$ と書き、この点を点 α と呼ぶこともある。例えば、点 0 は原点 O のことである。

例1

方程式 $z^2 = -i$ を解き、そのときの z をすべて複素数平面上に図示せよ。ただし、 i は虚数単位である。

解説

$$z^2 = -i$$

$z = a + bi$ (a, b は実数) とおくと

$$(a + bi)^2 = -i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = -i$$

a, b は実数であるから、複素数の相等より

$$a^2 - b^2 = 0, 2ab = -1$$

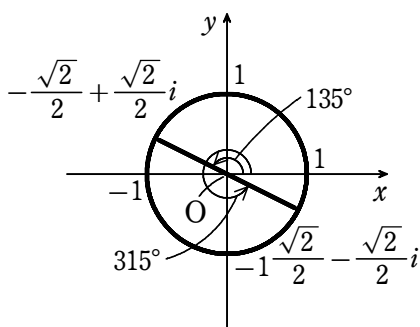
$$b = \pm a, 2ab = -1$$

a, b は実数より,

$$a^2 = \frac{1}{2}, b = -a$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (複号同順)}$$

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



(2) 共役な複素数

複素数 $\alpha = a + bi$ に対し

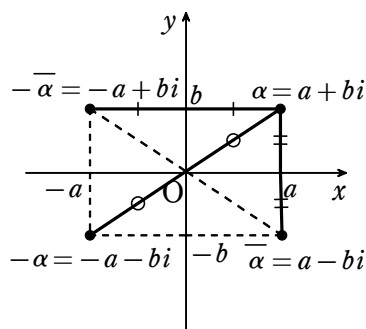
$$\bar{\alpha} = a - bi$$

を α に共役な複素数, または α の共役複素数という。 α と $\bar{\alpha}$ について

$$\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$\alpha \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$\overline{\bar{\alpha}} = \overline{a - bi} = a + bi = \alpha$$



が成り立つ。また, 複素数平面上の点について, 次のことが成り立つ。

点 $\bar{\alpha}$ は点 α と実軸に関して対称

点 $-\alpha$ は点 α と原点に関して対称

点 $-\bar{\alpha}$ は点 α と虚軸に対して対称

これから, 次のことが成り立つことが分かる。

$$\alpha \text{ が実数} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = \alpha$$

$$\alpha \text{ が純虚数} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = -\alpha, \alpha \neq 0$$

複素数 α, β の共役複素数について、次のことが成り立つ。

1. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$
2. $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$
3. $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \overline{\beta}$
4. $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ として計算すれば導かれる。

例2

α を虚部が 0 でない複素数とする． α の共役な複素数と α^2 が等しいとき， α を求めよ．

解説

$$\overline{\alpha} = \alpha^2$$

$\alpha = x + yi$ (x, y は実数, $y \neq 0$) とおくと, $\overline{\alpha} = x - yi$ より

$$x - yi = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

x, y は実数より,

$$x = x^2 - y^2 \cdots \textcircled{1}, \quad -y = 2xy \cdots \textcircled{2}$$

$y \neq 0$ であるから, $\textcircled{2}$ より, $x = -\frac{1}{2}$

$\textcircled{1}$ より,

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - y^2$$

$$y^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって, $\alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

例3

複素数平面上の点 z に次の移動を行った点を z とその共役複素数 $\bar{z}$ で表せ.

z を実軸に関して対称移動した点は ア で, z を虚軸に関して対称移動した点は イ である. また, z を原点に関して対称移動した点は ウ で, z を直線 $z = i\bar{z}$ に関して対称移動した点は エ で, z を原点を中心に 90° 回転移動した点は オ である.

(解説)

$z = a + bi$ (a, b は実数) とおくと, $\bar{z} = a - bi$

z を実軸に関して対称移動した点は, $a - bi = \bar{z}$

z を虚軸に関して対称移動した点は, $-a + bi = -\bar{z}$

z を原点に関して対称移動した点は, $-a - bi = -z$

$z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと

$$z = i\bar{z} \iff x + yi = i(x - yi) \iff x + yi = xi + y$$

$$\iff x - y + (y - x)i = 0 \iff y = x$$

実軸を x 軸, 虚軸を y 軸とみなすと, 直線 $y = x$ になる

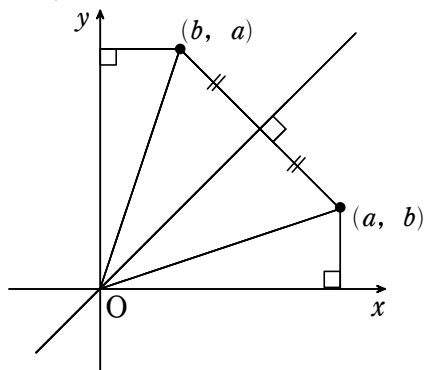
直線 $y = x$ に関して点 (a, b) と対称な点は点 (b, a) であるから

点 $z (= a + bi)$ を直線 $z = i\bar{z}$ に関して対称移動した点は

$$b + ai = i(a - bi) = i\bar{z}$$

点 z を原点の周りに 90° 回転移動した点は

$$z(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = iz$$



(3) 複素数の実数倍

複素数の実数倍を複素数平面上で考える。

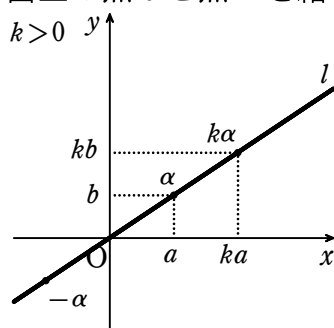
複素数 $\alpha = a + bi$ は 0 でないとし、複素数平面上の点 0 と点 α を結ぶ直線を l とする。 k を実数とすると

$$k\alpha = ka + (kb)i$$

であるから、点 α は直線 l 上にある。

逆に、直線 l 上の任意の点は、 $k\alpha$ の形の複素数を表す。

したがって、 $\alpha \neq 0$ のとき、次のことが成り立つ。



3 点 $0, \alpha, \beta$ が一直線上にある $\Leftrightarrow \beta = k\alpha$ となる実数 k が存在する

上の図からわかるように、点 $k\alpha$ は直線 l 上で

$k > 0$ ならば、原点に関して点 α と同じ側にあり、

$k = 0$ ならば、原点と一致し、

$k < 0$ ならば、原点に関して点 α と反対側にある。

特に、点 $-\alpha$ は原点に関して点 α と対称の位置にある。

複素数 α を表す点を A, $k\alpha$ を表す点を B とすると、線分 OB の長さは線分 OA の長さの $|k|$ 倍である。すなわち、 $OB = |k|OA$ である。

また、点 $k\alpha$ を点 α を k 倍した点である、ということもある。

例4

2 つの複素数 $z_1 = 3 + i(2a - 1)$, $z_2 = a + 2 - i$ について、原点、 z_1 の表す点、 z_2 の表す点をそれぞれ O, P_1 , P_2 とするとき、3 点 O, P_1 , P_2 が同一直線上にあるような実数 a の値を求めよ。

(解説)

3 点 O, P_1 , P_2 が同一直線上にあるから

$$a + 2 - i = 3k + ik(2a - 1)$$

を満たす実数 k が存在する

a, k が実数より

$$a + 2 = 3k \cdots \textcircled{1} \quad -1 = k(2a - 1) \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より

$$\frac{(a+2)(2a-1)}{3} = -1 \quad (2a+1)(a+1) = 0 \quad \therefore a = -1, -\frac{1}{2}$$

(4) 複素数の加法・減法

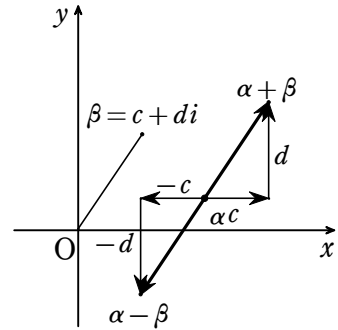
2つの複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ の和, 差を複素数平面上で考える。

$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$$

であるから, 点 $\alpha + \beta$ は点 α を, 実軸方向に c , 虚軸方向に d だけ平行移動した点である。また,

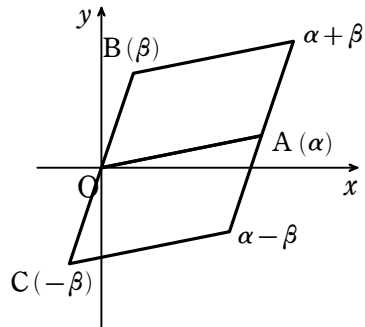
$$\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i$$

であるから, 点 $\alpha - \beta$ は点 α を, 実軸方向に $-c$, 虚軸方向に $-d$ だけ平行移動した点である。



3点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ が一直線上にないとき, $\alpha + \beta$ を表す点は, 右図のように, 線分 OA , OB を2辺とする平行四辺形の第4の頂点である。

また, $-\beta$ を表す点を C とすると, $\alpha - \beta$ を表す点は, 線分 OA , OC を2辺とする平行四辺形の第4の頂点である。



例5

複素数 $\alpha = 1 + i$, $\beta = 3 - 7i$, $\gamma = -1 - 2i$ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A , B , C とする. 平行四辺形 $ABCD$ の頂点 D を表す複素数を求めよ.

解説

$D(\delta)$ とすると

$$\delta = \alpha + (\gamma - \beta) = (1 + i) + (-4 + 5i) = -3 + 6i$$

別解

$$\delta = \gamma + (\alpha - \beta) = (-1 - 2i) + (-2 + 8i) = -3 + 6i \text{ としてもよい}$$

(5) 絶対値

複素数 $\alpha = a + bi$ に対し、

$$\sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

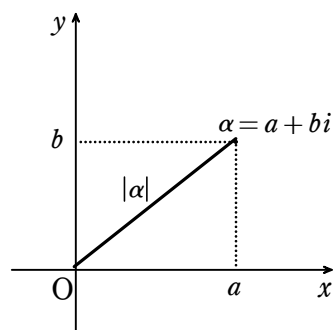
を α の絶対値といい、 $|\alpha|$ または $|a + bi|$ と表す。すなわち

$$|\alpha| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$$

$b=0$ のとき、 $|\alpha| = \sqrt{a^2}$ は実数 a の絶対値に一致する。

複素数平面上で考えると、 α の絶対値は、原点 O と点 α の間の距離に等しい。



例6

(1) 複素数 $z = 3 - \sqrt{3}i$ に対し、共役な複素数 $\bar{z}$ と絶対値 $|z|$ を求めよ。

(2) $z^2 + z + 3 = 0$ のとき、 $|z| = \boxed{}$

解説

$$(1) \bar{z} = 3 + \sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

別解

$$|z|^2 = z\bar{z} = (3 - \sqrt{3}i)(3 + \sqrt{3}i) = 12$$

$$|z| \geq 0 \text{ より, } |z| = 2\sqrt{3}$$

(2) 解の1つを α とする

判別式を D とすると、 $D = 1^2 - 12 = -11 < 0$ であるから、

α は虚数より、 $\bar{\alpha}$ も解である

解と係数の関係より

$$\alpha\bar{\alpha} = 3 \quad \therefore |\alpha|^2 = 3$$

$$|\alpha| = \sqrt{3} \text{ より, } |z| = \sqrt{3}$$

例7

複素数 z の方程式 $z^2 + z + k = 0$ が絶対値1の解をもつような実数 k の値を求めよ。

解説

(i) z が実数のとき

$$|z|=1 \text{ より, } z=\pm 1$$

$$z=1 \text{ のとき, } 1+1+k=0 \quad \therefore k=-2$$

$$z=-1 \text{ のとき, } 1-1+k=0 \quad \therefore k=0$$

(ii) z が虚数のとき

方程式の解は $\alpha, \overline{\alpha}$ とおける

解と係数の関係より

$$\alpha \overline{\alpha} = k \quad \therefore |\alpha|^2 = k$$

$$|\alpha|=1 \text{ より, } k=1$$

このとき, 判別式を D とすると,

$$D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0 \text{ より適する}$$

(i), (ii) より, $k=-2, 0, 1$

例8

複素数 α, β について, $|\alpha|=|\beta|=2, \alpha+\beta+2=0$ であるとき, 次の値を求めよ.

(1) $\alpha\beta$

(2) $\alpha^3+\beta^3+8$

解説

$$(1) |\alpha|=2 \text{ から } \alpha \overline{\alpha}=4 \text{ より, } \overline{\alpha}=\frac{4}{\alpha} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に, } \overline{\beta}=\frac{4}{\beta} \dots \textcircled{2}$$

$$\alpha+\beta+2=0 \text{ より}$$

$$\overline{\alpha+\beta+2}=\overline{0}$$

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+2=0 \dots \textcircled{3}$$

①, ② を ③ に代入すると

$$\frac{4}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+2=0$$

$$4\beta+4\alpha+2\alpha\beta=0$$

$$\therefore \alpha\beta=-2(\alpha+\beta)=-2\times(-2)=4$$

$$\begin{aligned} (2) \alpha^3+\beta^3+8 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+8 \\ &= (-2)^3-3\times 4\times(-2)+8=24 \end{aligned}$$

例9

(1) 複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ および $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = |\delta| = 1$ を満たすとき, $|\alpha - \beta|^2 + |\alpha - \gamma|^2 + |\alpha - \delta|^2$ の値を求めよ.

(2) $\alpha + \beta = \alpha\beta$, $|\alpha| = |\beta| = 1$ を満たす複素数 α, β の組をすべて求めよ.

(解説)

$$(1) |\alpha - \beta|^2 + |\alpha - \gamma|^2 + |\alpha - \delta|^2$$

$$= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) + (\alpha - \gamma)(\overline{\alpha} - \overline{\gamma}) + (\alpha - \delta)(\overline{\alpha} - \overline{\delta})$$

$$= |\alpha|^2 - \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta + |\beta|^2 + |\alpha|^2 - \alpha\overline{\gamma} - \overline{\alpha}\gamma + |\gamma|^2 + |\alpha|^2 - \alpha\overline{\delta} - \overline{\alpha}\delta + |\delta|^2$$

$$= 3|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 - \alpha(\overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta}) - \overline{\alpha}(\beta + \gamma + \delta)$$

$$= 6 - \alpha(\overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta}) - \overline{\alpha}(\beta + \gamma + \delta)$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \text{ から } \beta + \gamma + \delta = -\alpha \text{ であり,}$$

$$\overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta} = -\overline{\alpha} \text{ から } \overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta} = -\overline{\alpha} \text{ より}$$

$$(\text{与式}) = 6 - \alpha(-\overline{\alpha}) - \overline{\alpha}(-\alpha) = 6 + |\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 8$$

$$(2) \alpha + \beta = \alpha\beta \text{ より}$$

$$\alpha = \beta(\alpha - 1) \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore |\alpha| = |\beta||\alpha - 1|$$

$$|\alpha| = |\beta| = 1 \text{ より}$$

$$|\alpha - 1| = 1$$

$$|\alpha - 1|^2 = 1$$

$$(\alpha - 1)(\overline{\alpha} - 1) = 1 \quad \therefore \alpha + \overline{\alpha} = 1$$

よって, α の実部は $\frac{1}{2}$

$$|\alpha| = 1 \text{ より, } \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

①より

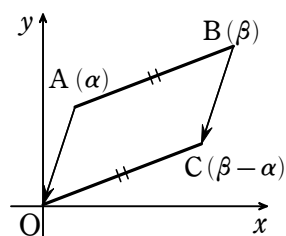
$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{-1 \pm \sqrt{3}i} = \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \text{ (複号同順)}$$

よって

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ または } \alpha = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

複素数平面上で、2点 α, β 間の距離について考える。

3点 $O(0), A(\alpha), B(\beta)$ に対して、点 A が原点に移るような平行移動によって、点 B は $\beta - \alpha$ を表す点 C に移る。
このとき、 $AB = OC = |\beta - \alpha|$
したがって、次のことが成り立つ。



2点 α, β 間の距離は $|\beta - \alpha|$

例10

- (1) 複素数平面上の2点 $A(\sqrt{3} - i), B(2\sqrt{3} + 2i)$ に対して、線分 AB の長さを求めよ。
 (2) 複素数 $\alpha = 2 + i, \beta = 5 + 3i$ に対して、 t が実軸上を動くとき、 $|\alpha - t| + |\beta - t|$ の最小値を求めよ

(解説)

(1) $AB = |(2\sqrt{3} + 2i) - (\sqrt{3} - i)| = |\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$

(2) $A(\alpha), B(\beta), P(t)$ とおくと、

$|\alpha - t|$ は線分 AP の長さを表し、 $|\beta - t|$ は線分 BP の長さを表す

$A'(\bar{\alpha})$ とすると、 $AP = A'P$ であるから

$AP + BP = A'P + BP$ より

$A'P + BP$ の最小値を求めればよい

3点 A', P, B が一直線上にあるとき、 $A'P + BP$ は最小より求める最小値は

$$\begin{aligned} |\bar{\alpha} - \beta| &= |2 - i - (5 + 3i)| \\ &= |-3 - 4i| = 5 \end{aligned}$$

複素数 α, β の絶対値について、次のことが成り立つ。

1. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

2. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ (ただし、 $\beta \neq 0$)

1 について

$|\alpha\beta|, |\alpha||\beta| \geq 0$ であるから,

$|\alpha\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2$ を示せばよい

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta(\overline{\alpha\beta}) = \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2$$

2 も同様

例11

実数 a に対し $(1-i)(a+i)$ の絶対値が $\sqrt{6}$ であれば, $a = \boxed{}$ である.

複素数 $\alpha = 1+2i$ と $\beta = 2-i$ について, $\left| \frac{\beta^2 - 3\beta}{\alpha} \right|$ の値を求めよ.

解説

(1) $|(1-i)(a+i)| = \sqrt{6}$ より

$$|1-i||a+i| = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{a^2+1} = \sqrt{6}$$

$$a^2+1=3 \quad \therefore a = \pm\sqrt{2}$$

(2) $\left| \frac{\beta^2 - 3\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\beta(\beta-3)}{\alpha} \right| = \frac{|\beta||\beta-3|}{|\alpha|}$

$$= \frac{|2-i||-1-i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

(6) 実部・虚部

複素数 $\alpha = a+bi$ に対し, a を α の実部といい, $\operatorname{Re}\alpha$ と表し, b を α の虚部といい, $\operatorname{Im}\alpha$ と表す. すなわち,

$$a = \operatorname{Re}\alpha, b = \operatorname{Im}\alpha$$

α と $\overline{\alpha} = a-bi$ について,

$$\alpha + \overline{\alpha} = 2a \text{ より, } \operatorname{Re}\alpha = a = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}$$

$$\alpha - \overline{\alpha} = 2bi \text{ より, } \operatorname{Im}\alpha = b = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$$

であるから, 以下のことが成り立つ。

複素数の実部・虚部

$\alpha = a + bi$ に対し、 α の共役複素数を $\bar{\alpha}$ とすると

$$\operatorname{Re}\alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \operatorname{Im}\alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

例12

(1) 複素数 $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$ の実部を答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(2) z, w を $|z| = 2, |w| = 5$ を満たす複素数とする。 $z\bar{w}$ の実部が 3 であるとき、 $|z - w|$ の値を求めよ。ただし、 $\bar{w}$ は w の共役な複素数である。

(解説)

$$(1) \alpha = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i} \text{ とおくと, } \bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}$$

$$\operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}i)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2}i)^2}{3 + 2} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} (2) |z - w|^2 &= (z - w)(\overline{z - w}) \\ &= (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 - (z\bar{w} + \bar{z}w) + |w|^2 \end{aligned}$$

ここで、 $z\bar{w}$ の実部が 3 より

$$\frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} = 3 \quad \therefore z\bar{w} + \bar{z}w = 6$$

よって、

$$|z - w|^2 = 2^2 - 6 + 5^2 = 23$$

$$|z - w| \geq 0 \text{ より, } |z - w| = \sqrt{23}$$

α が実数のとき、 $\operatorname{Im}\alpha = 0$ より、 $\bar{\alpha} = \alpha$

α が純虚数のとき、 $\operatorname{Re}\alpha = 0, \operatorname{Im}\alpha \neq 0$ より、 $\bar{\alpha} = -\alpha, \bar{\alpha} \neq \alpha$

これは、 $\bar{\alpha} = -\alpha, \alpha \neq 0$ と書き換えることができる。

したがって、次のことが成り立つ。

実数条件・純虚数条件

α が実数 $\Leftrightarrow \bar{\alpha} = \alpha$

α が純虚数 $\Leftrightarrow \bar{\alpha} = -\alpha, \bar{\alpha} \neq \alpha$

例13

(1) 複素数 z は絶対値が 1 で、 $z^3 - z$ は実数である。このような z は全部で $\boxed{\quad}$ 個あって、それらは $\boxed{\quad}$ である。

(2) $z + \frac{1}{z}$ が実数でかつ $|z - 1| = 1$ であるような複素数 z の値を求めよ。

解説

(1) $z^3 - z$ は実数より

$$\overline{z^3 - z} = z^3 - z$$

$$\overline{z^3} - \overline{z} = z^3 - z$$

$$(\overline{z})^3 - z^3 - (\overline{z} - z) = 0$$

$$(\overline{z} - z)\{(\overline{z})^2 + z\overline{z} + z^2\} - (\overline{z} - z) = 0$$

$$(\overline{z} - z)\{(\overline{z})^2 + |z|^2 + z^2 - 1\} = 0$$

$$(\overline{z} - z)\{(\overline{z})^2 + z^2\} = 0$$

$$\therefore \overline{z} = z, \quad (\overline{z})^2 + z^2 = 0$$

(i) $\overline{z} = z$ のとき

z は実数であるから、

$$|z| = 1 \text{ より, } z = \pm 1$$

(ii) $z^2 + \overline{z}^2 = 0$ のとき

$$(z + \overline{z})^2 - 2z\overline{z} = 0$$

$$(z + \overline{z})^2 = 2$$

$$z + \overline{z} = \pm\sqrt{2}$$

よって、 z の実部は $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|z| = 1$ であるから、虚部は

$$\pm\sqrt{1^2 - \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{したがって, } z = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}, \quad \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

(i), (ii)より、 z は 6 個あって、

$$z = \pm 1, \quad \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}, \quad \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

(2) $z + \frac{1}{z}$ は実数より

$$\overline{z + \frac{1}{z}} = z + \frac{1}{z}$$

$$\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z}$$

両辺に $z\overline{z}$ をかけて

$$|z|^2 \overline{z} + z = |z|^2 z + \overline{z}$$

$$|z|^2 (\overline{z} - z) - (\overline{z} - z) = 0$$

$$(|z|^2 - 1)(\overline{z} - z) = 0$$

$$\therefore |z|^2 = 1, \quad \overline{z} = z$$

$|z - 1| = 1$ より

$$|z - 1|^2 = 1^2$$

$$(z - 1)(\overline{z} - 1) = 1$$

$$z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = 1$$

$$\therefore |z|^2 - (z + \overline{z}) = 0$$

(i) $|z|^2 = 1$ のとき

$$z + \overline{z} = 1 \text{ より, } z \text{ の実部は } \frac{1}{2}$$

$|z|^2 = 1$ より, 虚部 y は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \quad y^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって, } z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(ii) $\overline{z} = z$ のとき

$$z^2 - 2z = 0$$

$$z(z - 2) = 0$$

$z \neq 0$ より, $z = 2$

$$(i), (ii) \text{より, } z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, 2$$

(7) 極形式

複素数平面上で、0でない複素数 $z = a + bi$ を表す点を P とする。

線分 OP の長さを r ，実軸の正の部分から半直線 OP までの回転角を θ とすると

$$a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$$

よって、 z が次の形で表される。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ただし、 $r > 0$

これを複素数 z の極形式という。

ここで、 r は z の絶対値に等しい。

また、角 θ を z の偏角といい、 $\arg z$ と表す。すなわち

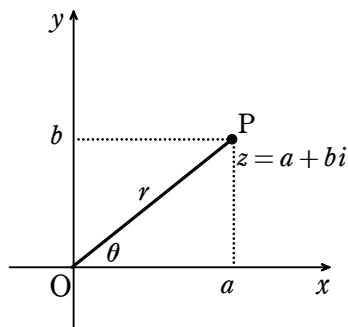
$$r = |z|, \theta = \arg z$$

特に、絶対値が 1 の複素数の極形式は、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ である。

複素数 z の偏角 θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲ではただ 1 通りに定まる。偏角の 1 つを θ_0 とすると、 z の偏角は一般に次のように表される。

$$\arg z = \theta_0 + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

☐ 以後、複素数を極形式で表すとき、その複素数は 0 でないとする。



複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の共役複素数 $\bar{z}$ については

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

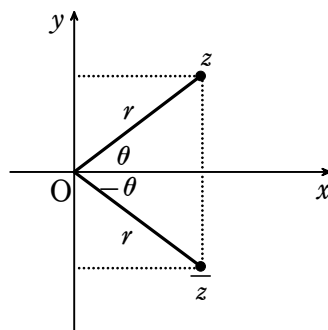
であるから、 $\bar{z}$ を極形式で表すと

$$\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$$

このことは、点 z と点 $\bar{z}$ が実軸に関して対称であることからわかる。

したがって、次の等式が成り立つ。

$$|\bar{z}| = |z|, \arg \bar{z} = -\arg z$$



☐ 等式 $\arg \bar{z} = -\arg z$ は、両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味している。以後、偏角についての等式は、この意味で考える。この場合、 $\arg \bar{z} \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$ ということである。

例14

複素数 $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\beta = \sqrt{3} + i$ をそれぞれ極形式で表せ。

解説

右図より

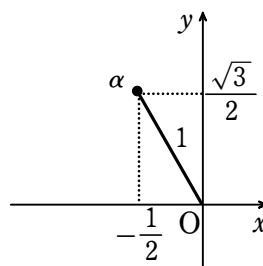
$$|\alpha| = 1, \arg \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

よって

$$\alpha = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

同様に

$$\beta = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$



例15

次の複素数を極形式で表せ。ただし、 α は 180° の奇数倍ではないとする。

- (1) $-\cos \alpha + i \sin \alpha$
- (2) $\sin \alpha + i \cos \alpha$
- (3) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$

解説

$$(1) |-\cos \alpha + i \sin \alpha| = \sqrt{(-\cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = 1$$

$\cos \theta = -\cos \alpha, \sin \theta = \sin \alpha$ を満たす θ の 1 つは $\theta = \pi - \alpha$

よって、 $\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)$

$$(2) |\sin \alpha + i \cos \alpha| = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1$$

$\cos \theta = \sin \alpha, \sin \theta = \cos \alpha$ を満たす θ の 1 つは $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

よって、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$(3) |1 + \cos \alpha + i \sin \alpha| = \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{2 + 2\cos \alpha} = 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|$$

n を整数として、

$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, すなわち $(4n-1)\pi < \alpha < (4n+1)\pi$ のとき

$$1 + \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, すなわち $(4n+1)\pi < \alpha < (4n+3)\pi$ のとき

$$\begin{aligned}
 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(-\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\
 &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left\{ \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) \right\}
 \end{aligned}$$

別解 幾何的に考える

$\cos \alpha + i \sin \alpha$ の表す点を P

$1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ の表す点を Q とすると

OP=OQ=1 の二等辺三角形となる

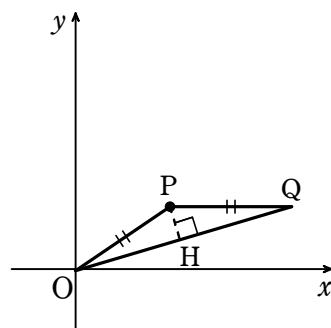
また, OQ は x 軸の正の部分と OP が作る角の二等分線より

$$OQ = 2OH = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

よって Q を極形式で表すと

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

のようにしてもよいが, 幾何を利用するときは α により場合分けが生じるので, 煩雑さはある。



(8) 複素数の積と商

極形式を用いて, 複素数の積と商について考える。

0 でない 2 つの複素数

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

の積 $z_1 z_2$ は, 三角関数の加法定理を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\
 &= r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \\
 &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}
 \end{aligned}$$

よって, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\arg z_1 z_2 = \theta_1 + \theta_2$

以上をまとめると, 次のようになる。

複素数の積と絶対値, 偏角

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ とする

$$1. z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

$$2. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$3. \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

同様に，商 $\frac{z_1}{z_2}$ は，

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)\{\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2)\} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}\end{aligned}$$

よって， $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ， $\arg \frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2$

以上をまとめると，次のようになる。

複素数の商と絶対値，偏角

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ， $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ とする

1. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3. $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

例16

(1) i を虚数単位とする。複素数 $z = (1 + i)(\sqrt{3} - i)$ を極形式で

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表すとき， $(r, \theta) = \sqrt{\quad}$ である。ただし， $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(2) 複素数 $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$ の絶対値と偏角 θ を求めよ。ただし， $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする。

解説

$$\begin{aligned}
 (1) (1+i)(\sqrt{3}-i) &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} \\
 &= 2\sqrt{2} \left[\cos \left\{ \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} + i \sin \left\{ \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)
 \end{aligned}$$

よって, $(r, \theta) = \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{12} \right)$

$$\begin{aligned}
 (2) \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} &= \frac{2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \{ \cos(60^\circ - 45^\circ) + i \sin(60^\circ - 45^\circ) \} \\
 &= \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)
 \end{aligned}$$

よって, 絶対値は $\sqrt{2}$, $\theta = 15^\circ$

参考 左辺を計算して, 実部と虚部をそれぞれ右辺と比較すれば, $\cos 15^\circ, \sin 15^\circ$ の値がそれぞれ得られる。

2つの複素数 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ の積と商を複素数平面上で考える。

まず, 積について, $z_3 = z_1 z_2$ とおくと

$$|z_3| = r_1 r_2, \arg z_3 = \theta_1 + \theta_2$$

よって, 点 $R(z_3)$ は, 点 $P(z_1)$ を原点を中心として角 θ_2 だけ回転した点

$P'(z_1')$ を r_2 倍した点である。

z_1 が実数でないとき, 右図のように

$\triangle ROQ$ は $\triangle POE$ を原点を中心として

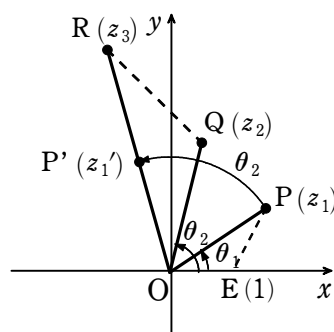
角 θ_2 だけ回転し, r_2 倍に拡大(縮小)したものであることがわかる。

すなわち, $\triangle ROQ$ と $\triangle POE$ は相似であり, その相似比は $r_2 : 1$ である。

$r_2 = 1$ のとき, $z_1 = z$, $\theta_2 = \theta$ とおくと,

点 $(\cos \theta + i \sin \theta)z$ は点 z を原点を中心として角 θ だけ回転した点である。特に, $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ であるから

点 iz は, 点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

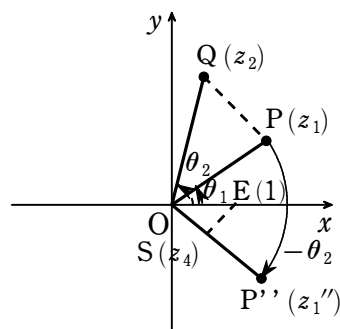


次に、商について、 $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$ とおくと

$$|z_4| = \frac{r_1}{r_2}, \arg z_4 = \theta_1 - \theta_2$$

よって、点 $S(z_4)$ は、点 $P(z_1)$ を原点を中心として角 $-\theta_2$ だけ回転した点

$P''(z_1'')$ を $\frac{1}{r_2}$ 倍した点である。



$z_4 = \frac{z_1}{z_2}$ が実数でないとき、右図のように $\triangle EOS$ は $\triangle QOP$ を原点を中心として角 $-\theta_2$ だけ回転し、 $\frac{1}{r_2}$ 倍に拡大 (縮小) したものであることがわかる。

すなわち、 $\triangle EOS$ と $\triangle QOP$ は相似であり、その相似比は $1 : r_2$ である。

例17

複素数平面上の3点 $O(0)$, $A(2 + \sqrt{3}i)$, B が、 $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ かつ $OA = 2OB$ を満たしているとき、点 B を表す複素数は である。

解説

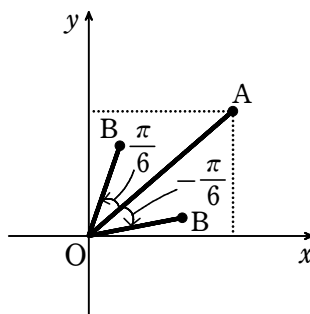
点 B は、点 $A(2 + \sqrt{3}i)$ を原点を中心として

$\frac{\pi}{6}$ または $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転し、

原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである

点 A を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転し、

原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍した点を表す複素数は



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) (2 + \sqrt{3}i) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (2 + \sqrt{3}i) \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{3} + i)(2 + \sqrt{3}i) = \frac{1}{4} (\sqrt{3} + 5i) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{4}i \end{aligned}$$

同様に、点 A を原点を中心として $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転し、

原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍した点を表す複素数は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}(2+\sqrt{3}i) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(2+\sqrt{3}i) \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{3}-i)(2+\sqrt{3}i) = \frac{1}{4}(3\sqrt{3}+i) = \frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i\end{aligned}$$

したがって、点 B を表す複素数は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}i, \frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

別解 後半は $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ で割ってもよい。

例18

複素数平面上の点 $4-2\sqrt{3}i$ を原点の周りに $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

解説

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)(4-2\sqrt{3}i) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4-2\sqrt{3}i) = 3\sqrt{3}-i$$

例19

(1) i を虚数単位とし、0 でない複素数 α の偏角 θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

複素数平面上に原点 O と 2 点 A(α), B($3-2i$) を頂点とする $\triangle OAB$ がある。 $\triangle OAB$ が正三角形であるとき、 α の実部は ア である。また、

$\triangle OAB$ が $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形であるとき、

$\alpha = \text{イ}$ である。

(2) 複素数平面上の原点を O とし、 $-1+3i$ を表す点を A とする。また、

点 B を表す複素数を ウ $+i$ とし、点 C を表す複素数を エ

$+ \text{オ}$ i とするとき、四角形 AOBC は正方形になる。

解説

(1) α の偏角 θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるから,

$\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 右図より,
点 A は原点 O を中心として,

点 B を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点より

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (3 - 2i) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (3 - 2i) \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3} - 2}{2} i\end{aligned}$$

よって, α の実部は $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$

$\triangle OAB$ が $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

であるとき, 右図より,

点 A は原点 O を中心として,

点 B を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小した点より

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (3 - 2i) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) (3 - 2i) \\ &= \frac{5 + i}{2}\end{aligned}$$

(2) 点 B を表す複素数の虚部が 1 であるから,

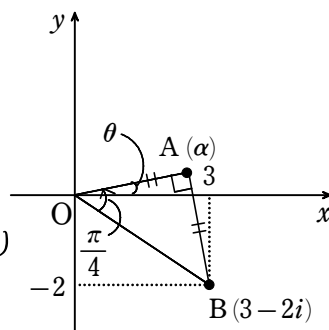
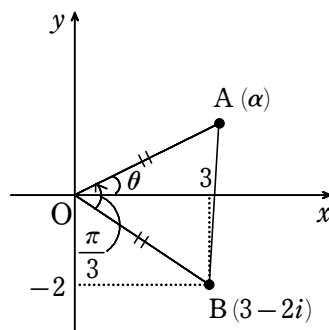
点 B は点 A を原点 O の周りに -90° 回転した点である

よって, 点 B を表す複素数は

$$-i(-1 + 3i) = 3 + i$$

したがって, 点 C を表す複素数は

$$(-1 + 3i) + (3 + i) = 2 + 4i$$



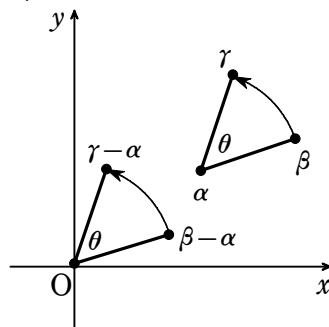
点 β を点 α を中心として角 θ だけ回転した点 γ について考える。

点 α が原点に移るような平行移動
 によって、点 β は $\beta - \alpha$ 、点 γ は $\gamma - \alpha$
 に移る。

$\beta - \alpha$ を原点を中心に θ だけ回転した
 ものが $\gamma - \alpha$ であるから

$$\gamma - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta)(\beta - \alpha)$$

したがって、次のことが成り立つ。



点 α を中心とする回転

点 β を点 α を中心として角 θ だけ回転した点 γ は

$$\gamma = (\cos \theta + i \sin \theta)(\beta - \alpha) + \alpha$$

例20

(1) 点 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ を中心として、点 $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ を時計回りに $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転させたときの点を表す複素数 γ を求めよ。

(2) 点 A (2, 1) を点 P の周りに 60° 回転した点の座標は

$\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であった。点 P の座標を求めよ。

解説

$$\begin{aligned} (1) \gamma &= \left\{ \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \right\} \left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \right\} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{3}i \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}-1}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$(2) B\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ とし,}$$

(x, y) を $x + yi$ として複素数平面上で考える

PA=PB であるから、 $\triangle PAB$ は二等辺三角形であり、

$\angle APB = 60^\circ$ であるから、 $\triangle PAB$ は正三角形

よって、点 P は点 B を点 A を中心に 60° 回転した点より

$$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left\{ \frac{3-3\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i - (2+i) \right\} + (2+i)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)\{(-1 - 3\sqrt{3}) + (-3 + \sqrt{3})i\} + (2 + i)$$

$$= (-1 - 3i) + (2 + i) = 1 - 2i$$

よって、点 P は $(1, -2)$

別解

点 P の座標を (x, y) とする

点 A $(2, 1)$ を点 P の周りに 60° 回転した点は

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\{(2 + i) - (x + iy)\} + (x + iy)$$

$$\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\{(2 - x) + (1 - y)i\} + (x + iy)$$

x, y は実数であるから、両辺の実部と虚部を比べて

$$\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y + x,$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + y$$

整理して

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{1}{2} - \sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore x = 1, y = -2$$

よって、点 P は $(1, -2)$

例21

複素数平面上に 3 点 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = (\sqrt{3} - 1) + 2i$, 実部を負の数とする z_3 をとる. 3 つの点 z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形が正三角形であるのは, $z_3 = \boxed{}$ のときである.

複素数平面上に, 正方形の頂点 A, B, C, D がこの順に反時計回りに並んでいる. 点 A, B の表す複素数を, それぞれ $1 + i, -1 + 2i$ とするとき, 点 C, D の表す複素数を求めよ.

解説

(1) z_2 を z_1 の周りに 60° 回転した点を α , -60° 回転した点を β とすると

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)(z_2 - z_1) + z_1 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3} + i) + (-1 + i) \\ &= -1 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= (z_2 - z_1) \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} + z_1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (\sqrt{3} + i) + (-1 + i) \\ &= \sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

z_3 の実部は負より

$$z_3 = -1 + 3i$$

(2) 点 $C(r)$, $D(\delta)$ とする

点 D は, 点 B を点 A の周りに
 90° だけ回転した点であるより

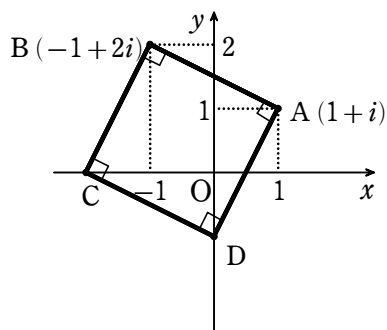
$$\begin{aligned}\delta &= i\{-1 + 2i - (1 + i)\} + (1 + i) \\ &= i(-2 + i) + 1 + i = -i\end{aligned}$$

点 C は, 点 D を点 A を点 B に移動した分
 だけ平行移動すればよいから

$$r = -i + \{-1 + 2i - (1 + i)\} = -2$$

よって

$$C(-2), D(-i)$$



補1

次の各式が成り立つことを証明せよ.

$$(1) \overline{z_1 z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

ただし, $\operatorname{Re}(z)$ は複素数 z の実部を表すものとする.

$$(2) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

解説

$$(1) \overline{z_1 z_2} = a + bi \cdots \textcircled{1} \text{ とおくと, } \overline{\overline{z_1 z_2}} = \overline{z_1} z_2 = a - bi \cdots \textcircled{2}$$

① - ② より

$$2a = z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2$$

$$\therefore \overline{z_1 z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

(2) 両辺ともに正であるから,

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 \geq 0 \text{ を示せばよい}$$

$$\text{右辺} = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 - (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$$

$$= 2|z_1||z_2| - (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2)$$

$$= 2(|z_1||z_2| - \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}))$$

$$\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| |\overline{z_2}| = |z_1| |z_2| \text{ より}$$

$$\geq 0$$

よって, 示された

$$\text{注 } |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \text{ は成り立つが,}$$

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|, |\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta| \text{ は成り立たない。}$$