

2.7 2次不等式とグラフ

(1) 2次不等式とグラフ

文字を含んだ2次不等式は、因数分解できるときは、因数分解をして解を文字を含んだ範囲で表すことができるが、因数分解できないときは、解の範囲が解の公式の形を含んだ範囲になるので、それを利用して問題を考えることは少し困難である。そこで、因数分解できないときは、グラフを利用して考えることが基本となる。

例1

実数 a に対して、 x についての2次不等式 $3x^2 - 2x + 3a + 1 \leq 0$ を満たす整数 x の個数を考える。

(1) 整数 x の個数が0のとき、 a のとりうる値の範囲は $a > -$ ^アである。

(2) 整数 x の個数が1のとき、 a のとりうる値の範囲は $-$ ^イ $< a \leq -$ ^ウ であり、そのとき $x =$ ^エ である。

(3) 整数 x の個数が2のとき、 a のとりうる値の範囲は $-$ ^オ $< a \leq -$ ^カ であり、そのとき、小さいほうの x の値は ^キ，大きいほうの x の値は ^ク である。

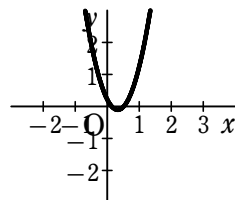
(4) 整数 x の個数が9のとき、 a のとりうる値の範囲は $-$ ^ケ $< a \leq -$ ^コ であり、そのとき、最小の x の値は $-$ ^サ，最大の x の値は ^シ である。

(解説)

$$(1) f(x) = 3x^2 - 2x + 3a + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 3a + \frac{2}{3}$$

とおく。

$y = f(x)$ のグラフは下に凸，軸は $x = \frac{1}{3}$



整数 x の個数が 0 であるための条件は

$$f(0) = 3a + 1 > 0 \quad \therefore a > -\frac{1}{3}$$

(2) 整数 x の個数が 1 であるための条件は

$$f(0) = 3a + 1 \leq 0 \text{ かつ } f(1) = 3a + 2 > 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} < a \leq -\frac{1}{3}$$

このとき, $x = 0$

(3) 整数 x の個数が 2 であるための条件は

$$f(1) = 3a + 2 \leq 0 \text{ かつ } f(-1) = 3a + 6 > 0$$

$$\therefore -2 < a \leq -\frac{2}{3}$$

このとき, $x = 0, x = 1$

(4) 整数 x の個数が 9 であるときの x の値は

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4$$

整数 x の個数が 9 であるための条件は

$$f(-4) = 3a + 57 \leq 0 \text{ かつ } f(5) = 3a + 66 > 0$$

$$\therefore -22 < a \leq -19$$

このとき, $x = -4, x = 4$

別解

$$(1) 3x^2 - 2x + 3a + 1 \leq 0$$

まず, 定数を分離して

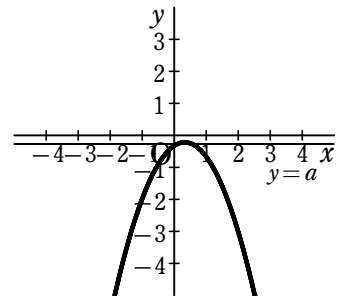
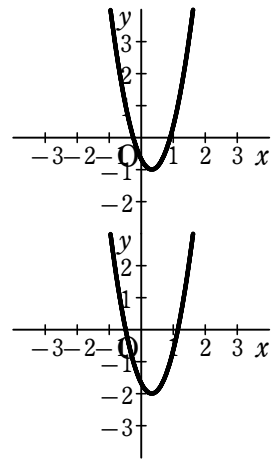
$$-x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \geq a \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = -\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}$$

①の解は, $y = f(x)$ の y 座標が $y = a$ の y 座標以上である x の範囲であるから

$$a > f(0) \quad \therefore a > -\frac{1}{3}$$

(2)~(4)も同様にしてできる。



例2

k を定数とし、 $f(x) = x^2 - kx + k + 3$ とする。不等式 $f(x) < 0$ を満たす整数が 3 だけであるとき、 k の値の範囲は である。

解説

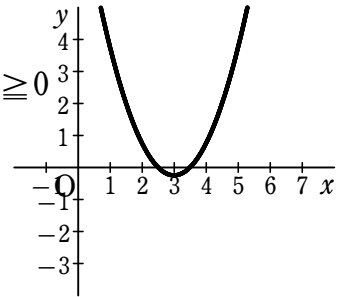
題意を満たすとき

$$f(2) \geq 0 \text{ かつ } f(3) < 0 \text{ かつ } f(4) \geq 0$$

$$-k + 7 \geq 0 \text{ かつ } -2k + 12 < 0 \text{ かつ } -3k + 19 \geq 0$$

$$k \leq 7 \text{ かつ } k > 6 \text{ かつ } k \leq \frac{19}{3}$$

$$\therefore 6 < k \leq \frac{19}{3}$$



別解

$$x^2 - kx + k + 3 < 0 \dots ①$$

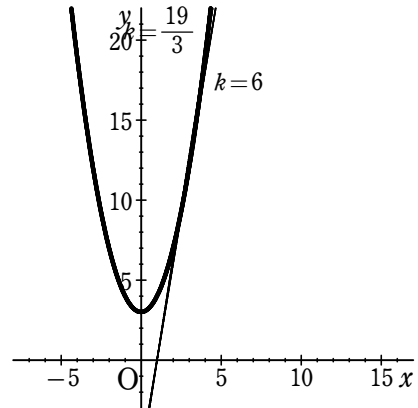
$$x^2 + 3 < k(x - 1)$$

①の解は、 $y = x^2 + 3$ の y 座標が
 $y = k(x - 1)$ の y 座標より小さくなる
 x の範囲であるから

$y = k(x - 1)$ は、点(1, 0)を通り、
傾きが k の直線より

$$6 < k \leq \frac{19}{3}$$

((2, 7) を通るとき、 $k = 7$)



例3

(1) 2 次不等式 $x^2 + mx + m < 0$ が実数の解をもたないとき、定数 m の値の範囲は ^ア $\leq m \leq$ ^イ である。また 2 次不等式 $x^2 + mx + m < 0$ の解が区間 $0 \leq x \leq 1$ を含むような定数 m の値の範囲は $m <^{\text{ウ}}$ である。

(2) $0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての実数 x に対して、 $x^2 - 2ax + a - 3 \leq 0$ が成り立つような定数 a の範囲を求めよ。

解説

$x^2 + mx + m = 0$ の判別式を D として,

$x^2 + mx + m < 0$ が、実数の解をもたないとき, $D \leq 0$ より

$$m^2 - 4m \leq 0 \quad \therefore 0 \leq m \leq 4$$

$f(x) = x^2 + mx + m$ とする

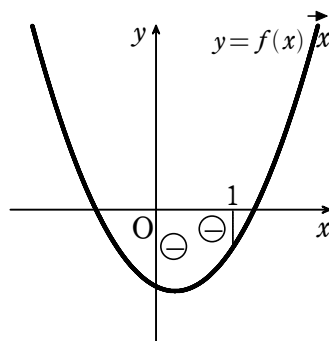
$x^2 + mx + m < 0$ の解が $0 \leq x \leq 1$ を含むとき

$$f(0) < 0 \text{ かつ } f(1) < 0$$

$$m < 0 \text{ かつ } 2m + 1 < 0$$

$$m < 0 \text{ かつ } m < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore m < -\frac{1}{2}$$



別解

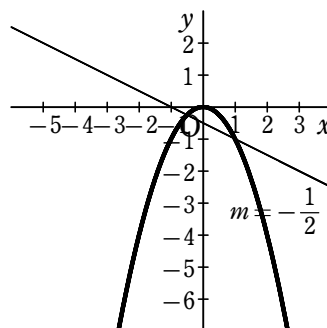
$$x^2 + mx + m < 0 \dots \textcircled{1}$$

$$-x^2 > m(x+1)$$

①の解は, $y = -x^2$ の y 座標が
 $y = m(x+1)$ の y 座標より大きい
 x の範囲であるから

$y = m(x+1)$ は, 点 $(-1, 0)$ を通り
 傾きが m の直線より

$$m < -\frac{1}{2}$$



$f(x) = x^2 - 2ax + a - 3$ とすると,

放物線 $y = f(x)$ は下に凸である。

よって, $0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての実数 x

に対して, $f(x) \leq 0$ が成り立つための条件は

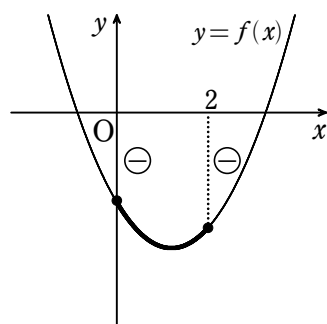
$$f(0) \leq 0 \text{ かつ } f(2) \leq 0$$

(最大値 ≤ 0 ということ)

$$f(0) \leq 0 \text{ より, } a - 3 \leq 0 \quad \therefore a \leq 3$$

$$f(2) \leq 0 \text{ より, } 4 - 4a + a - 3 \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{よって, } \frac{1}{3} \leq a \leq 3$$



例4

a を実数の定数とし、実数 x に関する条件 $x^2 + x + a \leq 0 \dots\dots (*)$ を考える。

(1) $(*)$ を満たす x が存在する a の範囲は $a \leq \boxed{}$ である。

(2) $(*)$ を満たす x が存在し、そのようなすべての x が $x \geq -3$ を満たす a の範囲は $\boxed{} \leq a \leq \boxed{}$ である。

(3) $(*)$ を満たす x が存在し、そのようなすべての x が $x \leq 0$ を満たす a の範囲は $\boxed{} \leq a \leq \boxed{}$ である。

解説

$f(x) = x^2 + x + a$ とすると

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$$

(1) $y = f(x)$ のグラフにおいて、 $y \leq 0$ となる x が存在するためには

$$a - \frac{1}{4} \leq 0 \quad \therefore a \leq \frac{1}{4} \dots\dots \textcircled{1}$$

(2) $y = f(x)$ のグラフの軸の方程式は、 $x = -\frac{1}{2}$

よって、題意を満たすとき

$$\textcircled{1} \text{ かつ } f(-3) \geq 0$$

$f(-3) \geq 0$ より

$$(-3)^2 + (-3) + a \geq 0 \quad \therefore a \geq -6 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } -6 \leq a \leq \frac{1}{4}$$

(3) 題意を満たすとき

$$\textcircled{1} \text{ かつ } f(0) \geq 0$$

$f(0) \geq 0$ より

$$a \geq 0 \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より, } 0 \leq a \leq \frac{1}{4}$$

例5

2次不等式 $x^2 + (a+1)x + 2a + 7 > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

(解説)

$x^2 + (a+1)x + 2a + 7 = 0$ の判別式を D とすると、

$D < 0$ となればよいから

$$D = (a+1)^2 - 4(2a+7) = a^2 - 6a - 27 < 0 \quad \therefore -3 < a < 9$$

例6

不等式 $kx^2 + (2k-3)x + 2k-1 \geq 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

(解説)

$$kx^2 + (2k-3)x + 2k-1 \geq 0$$

(i) $k=0$ のとき

$$-3x - 1 \geq 0 \quad \therefore x \leq -\frac{1}{3}$$

よって、条件を満たさない。

(ii) $k \neq 0$ のとき

$kx^2 + (2k-3)x + 2k-1 = 0$ の判別式を D として、

$k > 0$ かつ $D \leq 0$ となればよいから

$$D = (2k-3)^2 - 4k(2k-1) = -(4k^2 + 8k - 9) \leq 0$$

$$4k^2 + 8k - 9 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{-2 - \sqrt{13}}{2}, \quad \frac{-2 + \sqrt{13}}{2} \leq k$$

$$k > 0 \text{ より, } k \geq \frac{-2 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(i), (ii) \text{ より, } k \geq \frac{-2 + \sqrt{13}}{2}$$

例7

$f(x) = x^2 - 2ax - a + 6$ について、すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ と

なる a の値の範囲は ア $< a < \text{イ}$ である。また、 $-1 \leq x \leq 1$

で常に $f(x) \geq 0$ となる a の値の範囲は ウ $\leq a \leq \text{エ}$ である。

(解説)

(前半)

$f(x)=0$ の判別式を D とすると, $D<0$ より

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-a+6) = a^2 + a - 6 < 0 \quad \therefore -3 < a < 2$$

(後半)

(i) $a < -1$ のとき

求める条件は, 最小値 $f(-1) \geq 0$

$$(-1)^2 - 2a(-1) - a + 6 \geq 0 \quad \therefore a \geq -7$$

$a < -1$ より, $-7 \leq a < -1$

(ii) $-1 \leq a \leq 1$ のとき

求める条件は, 最小値 $f(a) \geq 0$

$$-a^2 - a + 6 \geq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 2$$

$-1 \leq a \leq 1$ より, $-1 \leq a \leq 1$

(iii) $1 < a$ のとき

求める条件は, 最小値 $f(1) \geq 0$

$$1^2 - 2a \cdot 1 - a + 6 \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{7}{3}$$

$1 < a$ より, $1 < a \leq \frac{7}{3}$

(i)~(iii)より, $-7 \leq a \leq \frac{7}{3}$

〔注〕定義域に制限があるときは, 最小値 ≥ 0 となることが求める条件になる。前半も最小値 > 0 となる条件と同値である $D < 0$ という条件を使っているだけなので, やっていることは同じである。

例8

次の連立不等式がある。ただし, a は実数とする。

$$\begin{cases} x^2 + ax - 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 3 < 0 \end{cases}$$

この連立不等式が解をもつための条件は^ア である。また, この連立不等式の整数解がただ1つであるための条件は^イ である。

解説

$$\begin{cases} x^2 + ax - 3 \geq 0 & \cdots \textcircled{1} \\ 2x^2 - x - 3 < 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より

$$(x+1)(2x-3) < 0 \quad \therefore -1 < x < \frac{3}{2}$$

$f(x) = x^2 + ax - 3$ とおく

$y = f(x)$ のグラフは、下に凸の放物線で、

点 $(0, -3)$ を通るから、

この連立不等式が解をもつとき

$$f(-1) > 0 \quad \text{または} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

$$-a - 2 > 0 \quad \text{または} \quad \frac{3}{2}a - \frac{3}{4} > 0$$

$$\therefore a < -2, \quad \frac{1}{2} < a$$

②の整数解は $x = 0, 1$ であり、

$f(0) = -3$ であるから、 $x = 0$ は ① の整数解にはならない。

よって、整数解がただ1つであるとき

$$f(1) = a - 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq 2$$

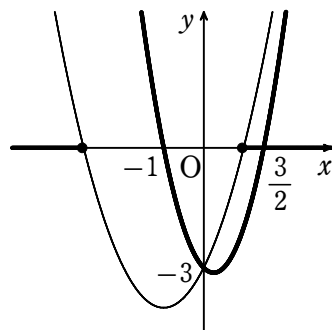
別解

$$x^2 + ax - 3 \geq 0$$

$$-x^2 + 3 \leq ax$$

として、前半は、この解が $-1 < x < \frac{3}{2}$ と共通部分をもてばよいから、

グラフからそれを判断し、後半も整数解を1つ含むように a の範囲を考えればよい。こちらの方が楽です。



例9

(1) 不等式 $x^2 + 2ax + 1 \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $2x^2 + 7x - 4 \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$ について、不等式 ① の解が常に存在するとする。このとき、不等式 ① を満たす x がすべて不等式 ② を満たすような a の値の範囲を求めよ。

(2) 連立不等式 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, $x^2 - ax + a - 7 \geq 0$ を考える。 $a = 4$ のとき、この連立不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。また、この連立不等式が解をもたないような実数 a の値の範囲を求めよ。

解説

(1) ②の解は

$$2x^2 + 7x - 4 \leq 0$$

$$(x+4)(2x-1) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

ここで、 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ とおくと、①の解は、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸より下側にある部分 (x 軸との共有点を含む) の x の値の範囲である。

$f(x) = (x+a)^2 - a^2 + 1$ から、軸の方程式は $x = -a$

また、 $f(x) = 0$ の判別式を D とおくと、求める条件は

$$D \geq 0, f(-4) \geq 0, f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0, -4 \leq -a \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \geq 0 \text{ より, } a \leq -1, 1 \leq a \cdots \textcircled{3}$$

$$f(-4) = 17 - 8a \geq 0 \text{ より, } a \leq \frac{17}{8} \cdots \textcircled{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a + \frac{5}{4} \geq 0 \text{ より, } a \geq -\frac{5}{4} \cdots \textcircled{5}$$

$$-4 \leq -a \leq \frac{1}{2} \text{ より, } -\frac{1}{2} \leq a \leq 4 \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3} \sim \textcircled{6} \text{ より, } 1 \leq a \leq \frac{17}{8}$$

$$(2) x^2 - 2x - 3 \leq 0 \cdots \textcircled{1} \quad x^2 - ax + a - 7 \geq 0 \cdots \textcircled{2} \text{ とおく}$$

$$\textcircled{1} \text{ を解くと, } -1 \leq x \leq 3 \cdots \textcircled{3}$$

$$a = 4 \text{ のとき, } \textcircled{2} \text{ は, } x^2 - 4x - 3 \geq 0$$

$$\text{これを解くと, } x \leq 2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7} \leq x \cdots \textcircled{4}$$

③, ④の共通部分を求めて

$$-1 \leq x \leq 2 - \sqrt{7}$$

$$f(x) = x^2 - ax + a - 7 \text{ とおくと,}$$

解をもたないとき、 $-1 \leq x \leq 3$ となるすべての x について $f(x) < 0$ であればよいから

$$f(-1) < 0 \text{ かつ } f(3) < 0$$

$$2a - 6 < 0 \text{ かつ } -2a + 2 < 0$$

$$a < 3 \text{ かつ } a > 1$$

$$\therefore 1 < a < 3$$

別解 定数分離でも解ける。

例10

どんな実数 x をとっても $x^2 - 3x + 2 > 0$ または $x^2 + ax + 1 > 0$ の、少なくとも一方を満足するような、 a の値の範囲を求めよ。

(解説)

$x^2 - 3x + 2 > 0$ を解くと

$$(x-1)(x-2) > 0 \quad \therefore x < 1, x > 2$$

よって、 $x^2 + ax + 1 > 0 \cdots \textcircled{1}$ が $1 \leq x \leq 2$ を解に含めばよい

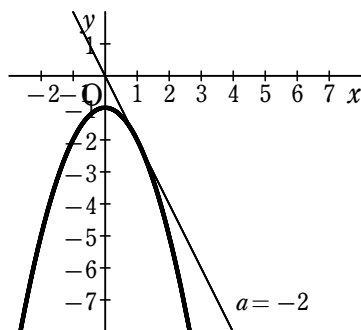
$$-x^2 - 1 < ax$$

①の解は、 $y = -x^2 - 1$ の y 座標が
 $y = ax$ の y 座標より小さい x の範囲
 である

$y = ax$ は、原点を通り、傾きが a の直線
 であるから、

$1 \leq x \leq 2$ を解に含むとき、

$$a > -2$$



〔注〕 $x^2 + ax + 1 > 0 \cdots \textcircled{1}$ が $1 \leq x \leq 2$ を解に含めばよいから、 $1 \leq x \leq 2$ において、 $x^2 + ax + 1 > 0$ が常に成り立てばよいとすると、 $y = x^2 + ax + 1$ の $1 \leq x \leq 2$ における最小値を求めることとなり、場合分けをしなければならないので、大変である。

補1

- (1) $(x-1)(x+2)-2<0$ を満たす整数 x を求めよ.
 (2) $(x-1)(x+2)-a<0$ を満たす整数 x がちょうど 10 個となるような実数 a の値の範囲を求めよ.
 (3) $(x-b)(x+2)-2<0$ を満たす整数 x がちょうど 3 個となるような実数 b の値の範囲を求めよ.

解説

(1) $(x-1)(x+2)-2<0$

$$(x-1)(x+2)<2 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)=(x-1)(x+2)$ とおくと,

①の解は, $y=f(x)$ の y 座標が $y=2$ の y 座標より小さい x の範囲である

$y=f(x)$ と $y=2$ の共有点の x 座標は

$$(x-1)(x+2)=2$$

$$x^2+x-4=0 \quad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

グラフより

$$x=-2, -1, 0, 1$$

(2) $f(x)=(x-1)(x+2)=x^2+x-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

軸は $x=-\frac{1}{2}$

(1)と同様に, 不等式を満たす整数 x が 10 個となるとき,

$$x=-5, -4, \dots, 4$$

よって,

$$f(4)<a\leq f(5)$$

$$\therefore 18<a\leq 28$$

(3) $(x-b)(x+2)-2<0 \cdots \textcircled{2}$

$$x^2+2x-2<b(x+2)$$

$g(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$ とおくと,

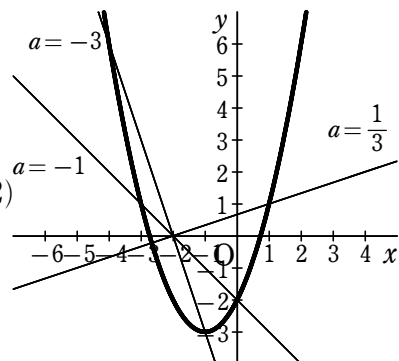
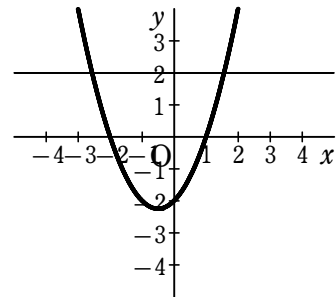
②の解は, $y=g(x)$ の y 座標が $y=b(x+2)$

の y 座標より小さい x の範囲である

$y=b(x+2)$ は点 $(-2, 0)$ を通り, 傾き b の

直線より

②を満たす整数 x が 3 個となるとき,



グラフより

$$-\frac{13}{3} < a < -3, -3 < a < -1, -1 < a \leq \frac{1}{3}$$