

## 高3数学 発展問題演習 6. 三角・指数・対数関数

1 [2010 東北大]

- (1)  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で  $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$  を満たす  $x$  の個数を求めよ。
- (2)  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で  $\cos(\pi \cos x) = \cos x$  を満たす  $x$  の個数を求めよ。

2 [京都大]

- (1)  $m, n$  を 2 つの正の整数とする.  $\cos m^\circ, \sin m^\circ, \cos n^\circ, \sin n^\circ$  のすべてが有理数であるとき,  $\cos(m+n)^\circ, \sin(m+n)^\circ$  はともに有理数であることを示せ.
- (2)  $n$  を 60 の約数とする. このとき,  $\cos n^\circ$  と  $\sin n^\circ$  の少なくとも一方は無理数であることを示せ.

3 [2017 京都大]

- $p, q$  を自然数,  $\alpha, \beta$  を  $\tan \alpha = \frac{1}{p}, \tan \beta = \frac{1}{q}$  を満たす実数とする. このとき  $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$  を満たす  $p, q$  の組  $(p, q)$  をすべて求めよ.

4 [2008 慶応義塾大]

$x$  の多項式  $f_n(x)$  ( $n=0, 1, \dots$ ) を

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

により順に定める。

- (1)  $f_5(x)$  を具体的に求めると  $f_5(x) = \text{ア}$   であり, 方程式  $f_5(x) = 0$  を解くと  $x = \text{イ}$   である。
- (2)  $n=1, 2, \dots$  に対して,  $f_n(\cos \theta) = \cos n\theta$  であることを示せ。
- (3) (1) と (2) を用いて  $\cos \frac{\pi}{10}$  の値を求めると  $\text{ウ}$   である。
- (4)  $n$  を 3 以上の奇数とする。関数  $y = f_n(x)$  ( $-1 < x < 1$ ) は極大値  $\text{エ}$   をとる。  
この極大値をとる  $x$  の値すべてを  $n$  を用いた式で表すと  $x = \text{オ}$   である。

## 高3数学 発展問題演習 6. 三角・指数・対数関数

5 [2012 東北大]

関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3} \cos x - \frac{5}{4} \right|$$

と定める。

- (1)  $t = -\sin x + \sqrt{3} \cos x$  とおく。  $f(x)$  を  $t$  の関数として表せ。
- (2)  $x$  が  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$  の範囲を動くとき、  $t$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3)  $x$  が  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$  の範囲を動くとき、  $f(x)$  のとりうる値の範囲を求めよ。また、  $f(x)$  が最大値をとる  $x$  は、  $60^\circ < x < 75^\circ$  を満たすことを示せ。

6 [1998 東京理科大]

点  $P$  は円周  $C_1 : (x-2)^2 + y^2 = 1$  上を、点  $Q$  は円周  $C_2 : (x+1)^2 + y^2 = 1$  上を、同じ速さで時計の針と反対の向きに動く。最初  $P, Q$  はそれぞれ  $(3, 0), (-1, 1)$  の位置にあるものとする。

- (1)  $P$  が円周  $C_1$  上を  $\frac{1}{4}$  周したときの、線分  $PQ$  の中点  $M$  の座標を求めよ。
- (2) 円周  $C_1$  の中心から  $P$  までの線分が  $x$  軸の正の向きとなす角を  $\theta$  として、  $PQ^2$  を  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  で表せ。
- (3)  $P$  が円周  $C_1$  上を 1 周するときの  $PQ$  の最大値とそれを与える  $\theta$  の値、最小値とそれを与える  $\theta$  の値をそれぞれ求めよ。
- (4) (2) における線分  $PQ$  の中点  $M$  の座標を  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  で表せ。
- (5)  $P$  が円周  $C_1$  上を 1 周するとき、(4) の点  $M$  はどのように動くか。

7 [1999 京都大]

$\alpha, \beta, \gamma$  は  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi$  を満たすものとする。このとき、

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

の最大値を求めよ。

## 高3数学 発展問題演習 6. 三角・指数・対数関数

8 [2000 三重大]

座標平面上で3点  $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ,  $B(\cos\beta, \sin\beta)$ ,  $C(1, 0)$  を考える。ただし、 $0^\circ < \alpha < \beta < 360^\circ$  とする。 $\triangle ABC$  の3辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  の長さを順に  $a$ ,  $b$ ,  $c$  とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $c^2 = 4 - 4\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}$  が成立することを示せ。
- (2)  $a^2 + b^2 + c^2 = 8 - 8\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$  が成立することを示せ。
- (3)  $a^2 + b^2 + c^2 = 8$  ならば、 $\triangle ABC$  は直角三角形であることを示せ。

9 [I. 2013 埼玉大 II. 2023 上智大]

- I. (1)  $64^{95}$  と  $65^{90}$  の大小を比較せよ。
- (2)  $63^{100}$  と  $64^{95}$  の大小を比較せよ。

II.  $(2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)^{20}$  の桁数は  である。

10 [2019 東北大]

$a$  を1ではない正の実数とし、 $n$  を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2} \log_a(2n-x)$$

- (1)  $n=6$  のとき、この不等式を満たす整数  $x$  をすべて求めよ。
- (2) この不等式を満たす整数  $x$  が存在するための  $n$  についての必要十分条件を求めよ。

11 [I. 2004 早稲田大 II. 2020 お茶の水女子大]

I.  $\log_{10} 2 = 0.3010$  とするとき

- (1) 次の式を満たす整数  $k$  の値を求めよ。

$$10^4 < 2^k < 2 \cdot 10^4$$

- (2) 2004 個の2の累乗、 $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2004}$  のうち、10進法で表したとき、その最高位の数字が1であるものの個数を求めよ。

## 高3数学 発展問題演習 6. 三角・指数・対数関数

---

Ⅱ. 以下の問いに答えよ。ただし、必要があれば、 $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ ,  
 $0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$  であることを用いてもよい。

- (1)  $3^{53}$  の桁数を求めよ。
- (2)  $3^{53}$  の最高位の数と1の位の数をそれぞれ求めよ。
- (3)  $|3^{53} - 2^m|$  が最小となる整数  $m$  を求めよ。

□12 [1998 一橋大]

- (1)  $\log_5 3$  は無理数であることを示せ。
- (2)  $\log_{10} r$  が有理数となる有理数  $r$  は  $r=10^q$  ( $q=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) に限ることを示せ。
- (3) 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\log_{10}(1+3+3^2+\dots+3^n)$  は無理数であることを示せ。