

2.4 2次方程式とグラフ, 2次不等式

(1) 2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

2次関数のグラフと x 軸が共有点をもつとき, その共有点の座標を求めてみよう。

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸 ($y = 0$) の共有点の x 座標を求めるには, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解けばよい。

例1

2次関数 $y = 3x^2 - 11x + 4$ のグラフと x 軸との共有点の座標を求めよ。

(解説)

$y = 3x^2 - 11x + 4$ のグラフと x 軸 ($y = 0$) との共有点は,

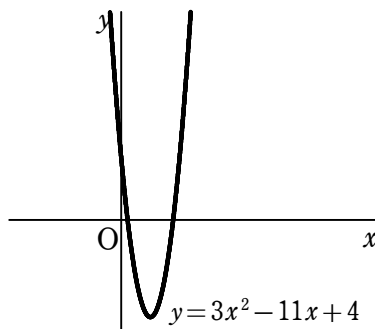
$$\begin{cases} y = 3x^2 - 11x + 4 \cdots \textcircled{1} \\ y = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解より, ①を②に代入して,

$$3x^2 - 11x + 4 = 0 \quad \therefore x = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{6}$$

よって

$$\left(\frac{11 + \sqrt{73}}{6}, 0 \right), \left(\frac{11 - \sqrt{73}}{6}, 0 \right)$$



(2) 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数のグラフと x 軸の位置関係について調べてみよう。

一般に, 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸が共有点をもつとき, その x 座標は2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解である。特に, 2次関数のグラフが x 軸に接する場合, 2次方程式の解は重解である。

また, 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸が共有点をもたないとき, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は実数解をもたない。

以上のことから, 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係と2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ について, 次のことが成り立つ。

2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

$y=ax^2+bx+c$ と x 軸との位置関係は、 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

$D>0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる

$D=0 \Leftrightarrow$ 1 点で接する

$D<0 \Leftrightarrow$ 共有点をもたない

[注] このように、2 次関数のグラフと x 軸の位置関係は、2 次方程式の実数解の個数の問題に帰着される。ここで、共有点が 2 個のとき、共有点は交点、1 個のとき、共有点は接点という。共有点という用語は交点、接点の両方に使えるが、交点という用語は接点のときには使えない。

例2

2 次関数 $y=x^2+6x+2m-1$ のグラフと x 軸の共有点の個数は、定数 m の値によってどのように変わるか。

[解説]

$x^2+6x+2m-1=0$ の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4}=3^2-(2m-1)=10-2m$$

$D>0$ ，すなわち $m<5$ のとき，2 個

$D=0$ ，すなわち $m=5$ のとき，1 個

$D<0$ ，すなわち $m>5$ のとき，0 個

[別解]

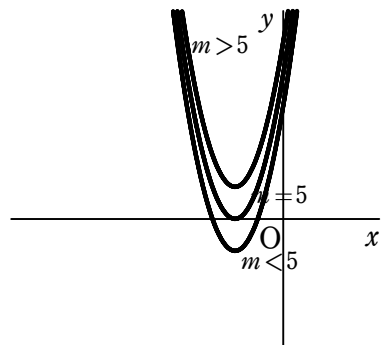
$$y=x^2+6x+2m-1=(x+3)^2+2m-10$$

グラフは下に凸，頂点は $(-3, 2m-10)$

$2m-10<0$ ，すなわち $m<5$ のとき，2 個

$2m-10=0$ ，すなわち $m=5$ のとき，1 個

$2m-10>0$ ，すなわち $m>5$ のとき，0 個



これを 2 次関数と x 軸との位置関係から考えてみよう。

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を平方完成して、

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

頂点は $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ であるから

(i) $a > 0$ のとき

共有点が 2 個のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0 \quad \therefore b^2 - 4ac > 0$$

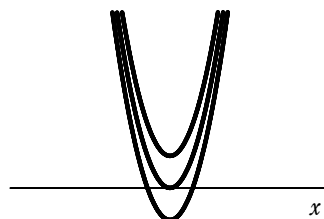
$ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると $D > 0$

共有点が 1 個のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \quad \therefore b^2 - 4ac = 0 \quad \therefore D = 0$$

共有点が 0 個のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0 \quad \therefore b^2 - 4ac < 0 \quad \therefore D < 0$$



(ii) $a < 0$ のとき

共有点が 2 個のとき

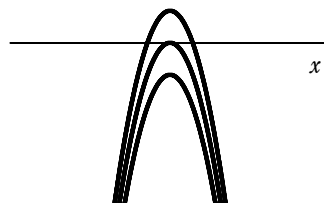
$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0 \quad \therefore b^2 - 4ac > 0 \quad \therefore D > 0$$

共有点が 1 個のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \quad \therefore b^2 - 4ac = 0 \quad \therefore D = 0$$

共有点が 0 個のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0 \quad \therefore b^2 - 4ac < 0 \quad \therefore D < 0$$



となり、同じ結果が得られる。

これらは、判別式のところで、

「 $D > 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ」の逆

「 $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ $\rightarrow D > 0$ 」も成り立つ

としたが、 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸との共有点の個数は、2 次方程式の実数解の個数は等しいから、その証明となっている。

例3

2 次関数 $y = -3x^2 + 4x + k$ (k は実数の定数) のグラフの頂点の座標は、
 $\left(\overset{\text{ア}}{\square}, \overset{\text{イ}}{\square} + k \right)$ であり、このグラフが x 軸と共有点をもつのは
 $k \geq \overset{\text{ウ}}{\square}$ のときである。グラフが x 軸と 2 点で交わり、2 点間の
 長さが $\frac{4}{3}$ であるとき、 $k = \overset{\text{エ}}{\square}$ である。

解説

$$y = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + k$$

よって、頂点の座標は $\left(\overset{\text{ア}}{\frac{2}{3}}, \overset{\text{イ}}{\frac{4}{3}} + k \right)$

$-3x^2 + 4x + k = 0$ ，すなわち $3x^2 - 4x - k = 0 \dots \text{①}$ の判別式を D とすると、 $y = -3x^2 + 4x + k$ が x 軸と共有点をもつとき、 $D \geq 0$ より

$$\frac{D}{4} = 4 + 3k \geq 0 \quad \therefore k \geq \overset{\text{ウ}}{-\frac{4}{3}}$$

① の 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{4}{3}, \alpha\beta = -\frac{k}{3}$$

$\beta - \alpha = \frac{4}{3}$ のとき

$$(\beta - \alpha)^2 = \frac{16}{9}$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{16}{9}$$

$$\frac{16}{9} + \frac{4}{3}k = \frac{16}{9} \quad \therefore k = \overset{\text{エ}}{0}$$

別解

題意より、 x 軸と $(0, 0), \left(\frac{4}{3}, 0 \right)$ で交わることが分かるので

$$y = -3x\left(x - \frac{4}{3}\right) = -3x^2 + 4x$$

よって、 $k = 0$

例4

直線 $y=x+6$ と放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標を求めよ。
また、この 2 点間の距離を求めよ。

解説

直線 $y=x+6$ と放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標は

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -2, 3$$

よって、2 つの交点の座標は、 $(-2, 4)$, $(3, 9)$

したがって、2 点間の距離は

$$\sqrt{\{3 - (-2)\}^2 + \{9 - 4\}^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

別解

2 つの交点を斜辺の端点とする直角二等辺三角形を三平方の定理を利用。

例5

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=3x-k$ について

(1) 直線が放物線に接するとき、 k の値を求めよ。

(2) 放物線と直線が 2 点で交わり、その 2 点間の距離が 6 のとき、 k の値を求めよ。

解説

(1) $y=x^2$ と $y=3x-k$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = 3x - k$$

$$x^2 - 3x + k = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①の判別式を D とすると、 $y=x^2$ と $y=3x-k$ が接するとき $D=0$ より

$$D = 9 - 4k = 0 \quad \therefore k = \frac{9}{4}$$

(2) ①の解を α , β とすると

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = k$$

2 点 $(\alpha, 3\alpha - k)$, $(\beta, 3\beta - k)$ の間の距離は

$$\begin{aligned} \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \{3\alpha - k - (3\beta - k)\}^2} &= \sqrt{10(\alpha - \beta)^2} \\ &= \sqrt{10\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} \\ &= \sqrt{10(9 - 4k)} \end{aligned}$$

よって,

$$\sqrt{10(9-4k)}=6$$

$$10(9-4k)=6^2, \quad \therefore k=\frac{27}{20}$$

(3) 2次不等式

不等式のすべての項を左辺に移項して整理したとき

$$ax^2+bx+c>0, ax^2+bx+c<0 \quad (a, b, c \text{ は定数で } a \neq 0)$$

などのように、左辺が x の2次式になる不等式を、 x についての2次不等式という。

2次関数のグラフを利用して、2次不等式を解いてみよう。

例6

(1) 2次不等式 $6x^2-x-2<0$ を解け。

(2) 不等式 $(x-1)(x+3)>0$ を解け。

(3) 2次不等式 $x^2-x-1<0$ を解け。

(解説)

(1) $6x^2-x-2<0$ を解けとは、 $6x^2-x-2<0$ を満たす x の範囲を求めよ、ということである。言い換えると、

$y=6x^2-x-2$ かつ $y<0$ を満たす x の範囲を求めよ、ということであるから、

$y=6x^2-x-2$ と x 軸との交点の x 座標は

$$6x^2-x-2=0$$

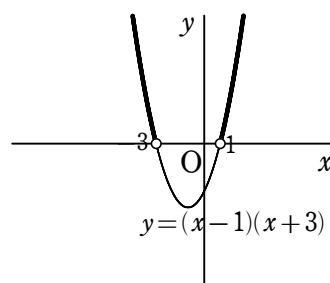
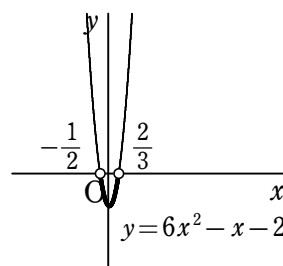
$$(3x-2)(2x+1)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

グラフより

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$$

(2) グラフより

$$x < -3, x > 1$$



(3) $x^2 - x - 1 = 0$ を解くと $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

よって

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

x^2 の係数が負のときは、そのまま上に凸の放物線で考えて解いてもよいが、両辺に -1 をかけて、 x^2 の係数を正にしてから解けばよい。

例7

2 次不等式 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 > 0$ の解を求めよ。

解説

両辺に -2 をかけて

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x+2)(x-3) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 3$$

2 次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ において、 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接する場合や、 x 軸と共有点をもたない場合について考えてみよう。

例8

次の不等式を解け。

(1) $x^2 - 2x + 1 > 0$ (2) $x^2 - 2x + 1 < 0$

(3) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ (4) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

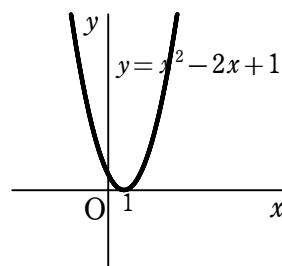
解説

(1) グラフより、 x は $x=1$ 以外の実数全体 ($x < 1$ または $x > 1$) でもよい。

(2) グラフより、解なし

(3) グラフより、 x は実数全体

(4) グラフより、 $x=1$



例9

次の不等式を解け。

(1) $x^2 - 2x + 2 > 0$ (2) $x^2 - 2x + 2 < 0$

(解説)

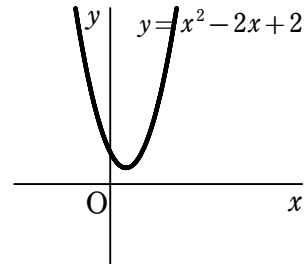
(1) $x^2 - 2x + 2 = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 2 = -1 < 0 \text{ より,}$$

$y = x^2 - 2x + 2$ と x 軸は共有点をもたない

グラフより, x は実数全体

(2) グラフより, 解なし

**(4) 文字の入った 2 次不等式**

文字の入った 2 次不等式の解き方について考えてみよう。ここでは、因数分解できるものについて考える。因数分解できないものについては、グラフを利用して解く。

例10

(1) $x^2 - (a+1)x - a - 2 > 0$ を x について解け。ただし, a を実数とする。

(2) a と x を実数とする。 x についての不等式 $x^2 - (a^2 + a - 2)x + a^3 - 2a < 0$ を解け。

(3) a を定数とするとき, x についての不等式 $(a-2)x^2 + (4-a)x - 2 \geq 0$ を解け。

(解説)

(1) $x^2 - (a+1)x - a - 2 > 0$

$$(x+1)\{x-(a+2)\} > 0$$

$a+2 < -1$, すなわち $a < -3$ のとき, $x < a+2, -1 < x$

$a+2 = -1$, すなわち $a = -3$ のとき, $x \neq -1$ の実数

$a+2 > -1$, すなわち $a > -3$ のとき, $x < -1, a+2 < x$

(2) $x^2 - (a^2 + a - 2)x + a^3 - 2a < 0$

$$x^2 - (a^2 + a - 2)x + a(a^2 - 2) < 0$$

$$(x-a)\{x-(a^2-2)\} < 0$$

$a^2 - 2 > a$, すなわち $a < -1, 2 < a$ のとき, $a < x < a^2 - 2$

$a^2 - 2 = a$, すなわち $a = -1, 2$ のとき, 解なし

$a^2 - 2 < a$, すなわち $-1 < a < 2$ のとき, $a^2 - 2 < x < a$

$$(3) (a-2)x^2 + (4-a)x - 2 \geq 0 \text{ より}$$

$$(x-1)\{(a-2)x+2\} \geq 0$$

$$(i) a-2=0, \text{ すなわち } a=2 \text{ のとき}$$

$$2(x-1) \geq 0 \quad \therefore x \geq 1$$

$$(ii) a-2>0, \text{ すなわち } a>2 \text{ のとき}$$

$$(x-1)\left(x+\frac{2}{a-2}\right) \geq 0$$

$$a>2 \text{ であるから, } -\frac{2}{a-2} < 0 \text{ より, } -\frac{2}{a-2} < 1$$

$$\text{よって, } x \leq -\frac{2}{a-2}, \quad 1 \leq x$$

$$(iii) a-2<0 \text{ すなわち } a<2 \text{ のとき}$$

$$(x-1)\left(x+\frac{2}{a-2}\right) \leq 0$$

$$(ア) 1 = -\frac{2}{a-2}, \text{ すなわち } a=0 \text{ のとき}$$

$$(x-1)^2 \leq 0 \quad \therefore x=1$$

$$(イ) 1 < -\frac{2}{a-2}, \text{ すなわち } 0 < a < 2 \text{ のとき}$$

$$1 \leq x \leq -\frac{2}{a-2}$$

$$(ウ) -\frac{2}{a-2} < 1, \text{ すなわち } a < 0 \text{ のとき}$$

$$-\frac{2}{a-2} \leq x \leq 1$$

以上より

$$a < 0 \text{ のとき, } -\frac{2}{a-2} \leq x \leq 1$$

$$a = 0 \text{ のとき, } x = 1$$

$$0 < a < 2 \text{ のとき, } 1 \leq x \leq -\frac{2}{a-2}$$

$$a = 2 \text{ のとき, } x \geq 1$$

$$2 < a \text{ のとき, } x \leq -\frac{2}{a-2}, \quad 1 \leq x$$

(5) グラフを利用して未定係数を定める問題

例11

(1) 2次不等式 $-2x^2 + ax + b > 0$ の解が $-1 < x < 2$ となるように定数 a, b を定めよ。

(2) $ax^2 + x + b > 0$ の解が $-1 < x < 2$ となるように、定数 a, b の値を定めよ。

(3) 2次不等式 $ax^2 + bx - 2 > 0$ の解が $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

解説

(1) 不等式より、上に凸の放物線 $y = -2x^2 + ax + b$ が $-1 < x < 2$ のときだけ x 軸より上側にあればよい

このとき、 $y = -2x^2 + ax + b$ は2点 $(-1, 0), (2, 0)$ を通るから

$$\begin{cases} -2 - a + b = 0 \\ -8 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 4$$

別解

条件より、与えられた不等式は

$$-2(x+1)(x-2) > 0$$

$$-2x^2 + 2x + 4 > 0$$

と変形できるから、 $a = 2, b = 4$

(2) 不等式の解が $-1 < x < 2$ となるとき

$y = ax^2 + x + b$ は、 $a < 0$ であり、2点 $(-1, 0), (2, 0)$ を通るから

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ 4a + b + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = -1, b = 2$$

別解

条件より、与えられた不等式は

$$a(x+1)(x-2) > 0$$

$$ax^2 - ax - 2a > 0$$

と変形できるから、 $a = -1, b = -2a = 2$

(3) 条件より, $a < 0$

与えられた不等式は,

$$a\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\} < 0$$

$$ax^2 - 4ax + a < 0$$

と変形できるから, $a = -2, b = -4a = 8$

〔注〕

この場合, $y = ax^2 + bx - 2$ が $(2 \pm \sqrt{3}, 0)$ を通るとするのは, さすがに面倒である。

(6) 連立 1 元 2 次不等式

2 次不等式の連立不等式の解き方について考えてみよう。

例12

(1) 連立不等式 $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 + 3x + 1 > 0 \end{cases}$ を満たす x の範囲は である。

(2) 連立不等式 $2x + 4 > x^2 > x + 2$ を解け。

(3) 不等式 $-1 < x^2 - 6x + 7 \leq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

〔解説〕

(1) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + 3x + 1 > 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ とする。

① より, $(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore -1 < x < 3$

② より, $x < \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < x$

よって

$$\frac{-3+\sqrt{5}}{2} < x < 3$$

(2) $A < B < C$ 型の連立不等式の問題である。

$A < B < C \Leftrightarrow A < B, B < C$ を利用して解く。

$2x + 4 > x^2$ より

$$x^2 - 2x - 4 < 0$$

$$\therefore 1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}$$

$x^2 > x + 2$ より

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$(x+1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -1, 2 < x$$

$$\text{よって, } 1 - \sqrt{5} < x < -1, 2 < x < 1 + \sqrt{5}$$

$$(3) -1 < x^2 - 6x + 7 \leq 0 \text{ より}$$

$$\begin{cases} -1 < x^2 - 6x + 7 & \cdots \text{①} \\ x^2 - 6x + 7 \leq 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

①より

$$x^2 - 6x + 8 > 0$$

$$(x-2)(x-4) > 0 \quad \therefore x < 2, 4 < x$$

②より

$$3 - \sqrt{2} \leq x \leq 3 + \sqrt{2}$$

よって

$$3 - \sqrt{2} \leq x < 2, 4 < x \leq 3 + \sqrt{2}$$

別解

$$-1 < (x-3)^2 - 2 \leq 0$$

$$1 < (x-3)^2 \leq 2$$

$$-\sqrt{2} \leq x-3 < -1, 1 < x-3 \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore 3 - \sqrt{2} \leq x < 2, 4 < x \leq 3 + \sqrt{2}$$

例13

a を実数の定数とする。2つの2次不等式

$$x^2 - x - 6 \leq 0 \quad \cdots \cdots \text{(A)}$$

$$x^2 - (2a-3)x + a^2 - 3a - 10 \leq 0 \quad \cdots \cdots \text{(B)}$$

がある。不等式(A)を満たすすべての x が不等式(B)を満たすような a

の値の範囲は⁷であり、不等式(A)と不等式(B)を同時に満たす

x が存在するような a の値の範囲は¹である。

解説

(A)より

$$(x-3)(x+2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 3$$

(B)より

$$x^2 - (2a-3)x + (a-5)(a+2) \leq 0$$

$$\{x - (a-5)\}\{x - (a+2)\} \leq 0$$

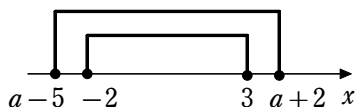
$a-5 < a+2$ より

$$a-5 \leq x \leq a+2$$

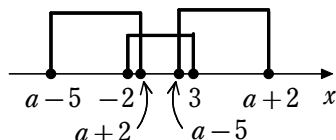
$$(ア) \ a-5 \leq -2 \text{ かつ } 3 \leq a+2 \quad \therefore 1 \leq a \leq 3$$

$$(イ) \ -2 \leq a+2 \text{ かつ } a-5 \leq 3 \quad \therefore -4 \leq a \leq 8$$

(ア)



(イ)



例14

不等式 $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ と $x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$ を同時に満たす整数 x が 2 個だけ存在するような正の整数 a の値を求めよ。

(解説)

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \text{ より}$$

$$(x-5)(x+1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1, \ 5 \leq x$$

$$x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0 \text{ より}$$

$$(x-a)(x-2a) \leq 0$$

$$a > 0 \text{ より, } a \leq x \leq 2a$$

これらを同時に満たす整数が 2 個だけ存在するための条件は

$$6 \leq 2a < 7 \quad \therefore 3 \leq a < \frac{7}{2}$$

$$a \text{ は整数より, } a = 3$$

補1

変数 x に関する次の方程式と不等式をそれぞれ解け。
ただし, a, b, c は実数とする.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$

(2) $ax^2 + bx + c > 0$

解説

(1) (i) $a = 0$ のとき

$$bx + c = 0$$

(ア) $b = 0$ のとき

$c = 0$ ならば 解はすべての数

$c \neq 0$ ならば 解なし

(イ) $b \neq 0$ のとき $x = -\frac{c}{b}$

(ii) $a \neq 0$ のとき

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(2) (i) $a = 0$ のとき

$$bx + c > 0$$

(ア) $b = 0$ のとき

$c > 0$ ならば 解はすべての実数

$c \leq 0$ ならば 解なし

(イ) $b > 0$ のとき $x > -\frac{c}{b}$

(ウ) $b < 0$ のとき $x < -\frac{c}{b}$

(ii) $a > 0$ のとき

(ア) $b^2 - 4ac = 0$ のとき $x \neq -\frac{b}{2a}$ を満たすすべての実数

(イ) $b^2 - 4ac > 0$ のとき $x < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < x$

(ウ) $b^2 - 4ac < 0$ ならば 解はすべての実数

(iii) $a < 0$ のとき

(ア) $b^2 - 4ac > 0$ ならば $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < x < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(イ) $b^2 - 4ac \leq 0$ ならば 解なし

補2

(1) 不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$ を満たす整数がちょうど 2 個だけあるような実数 a の値の範囲を求めよ.

(2) 不等式 $x^2 - (a^2 - 2a + 1)x + a^2 - 2a < 0$ を満たす整数 x が存在しないような a の値の範囲を求めよ.

(解説)

(1) $(x-a)(x-1) < 0$ から, 不等式の解は

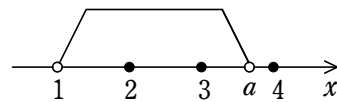
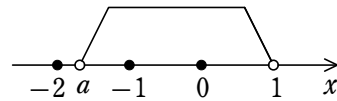
$a < 1$ のとき, $a < x < 1$

$1 < a$ のとき, $1 < x < a$

$a = 1$ のとき, 解なし

よって, 求める実数 a の値の範囲は

$$-2 \leq a < -1, 3 < a \leq 4 \quad \text{答}$$



(2) $x^2 - (a^2 - 2a + 1)x + a^2 - 2a < 0$ より

$$(x-1)\{x-(a^2-2a)\} < 0$$

よって, 求める条件は

$$0 \leq a^2 - 2a \leq 2$$

$$0 \leq (a-1)^2 - 1 \leq 2$$

$$1 \leq (a-1)^2 \leq 3$$

$$-\sqrt{3} \leq a-1 \leq -1, 1 \leq a-1 \leq \sqrt{3}$$

$$\therefore 1 - \sqrt{3} \leq a \leq 0, 2 \leq a \leq 1 + \sqrt{3}$$

補3

2次不等式 $2x^2 + (4-7a)x + a(3a-2) < 0$ の解がちょうど3個の整数を含むとき、正の定数 a の値の範囲を求めよ。

(解説)

$$2x^2 + (4-7a)x + a(3a-2) < 0$$

$$(2x-a)\{x-(3a-2)\} < 0$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)\{x - (3a-2)\} < 0$$

$a > 0$ における、 $x = \frac{a}{2}$ 、 $x = 3a-2$ の

グラフは右の図のようになる

$\frac{a}{2} > 3a-2$ のとき、整数解が3個となる

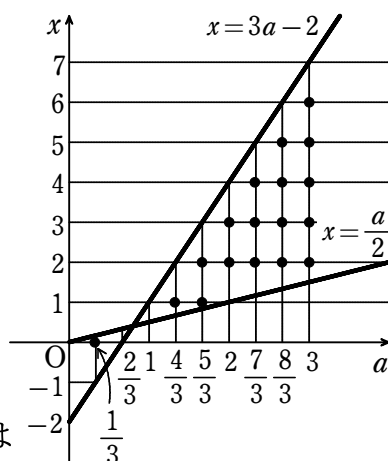
ことはないので、 $\frac{a}{2} < 3a-2$ で考える

このとき、不等式の解は

$$\frac{a}{2} < x < 3a-2$$

であり、整数解がちょうど3個となるのは
図より

$$\frac{5}{3} < a < 2, \quad 2 < a \leq \frac{7}{3}$$



補4

不等式 $x^2 - (a + a^2)x + a^3 < 0$ (ただし, a は正の整数) を満たす x の値のうち, 整数が 50 個以上存在するような a の値の最小値を求めよ.

(解説)

$$x^2 - (a + a^2)x + a^3 < 0$$

$$(x - a)(x - a^2) < 0$$

a は正の整数であるから $a \geq 1$ より, $a \leq a^2$

よって, 不等式が解をもつとき解は

$$a < x < a^2$$

これを満たす整数 x は $a + 1, \dots, a^2 - 1$ であるから,
整数解が 50 個以上である条件は

$$(a^2 - 1) - (a + 1) + 1 \geq 50$$

$$a(a - 1) \geq 51$$

$$6 \cdot 7 = 42, 7 \cdot 8 = 56 \text{ より, } a \geq 8$$

よって, a の最小値は 8

補5

x の 2 次不等式

$$6x^2 - (16a + 7)x + (2a + 1)(5a + 2) < 0$$

を満たす整数 x が 10 個となるように, 正の整数 a の値を定めよ。

(解説)

$$6x^2 - (16a + 7)x + (2a + 1)(5a + 2) < 0$$

$$\{2x - (2a + 1)\}\{3x - (5a + 2)\} < 0$$

$$\left(x - \frac{2a + 1}{2}\right)\left(x - \frac{5a + 2}{3}\right) < 0$$

$$a > 0 \text{ において, } \frac{2a + 1}{2} < \frac{5a + 2}{3} \text{ より}$$

$$\frac{2a + 1}{2} < x < \frac{5a + 2}{3}$$

これを満たす整数 x が 10 個であるためには,

$$9 < \frac{5a + 2}{3} - \frac{2a + 1}{2} \leq 11$$

であることが必要である(必要条件(少なくとも成り立っていないといけない条件))

$$9 < \frac{4a+1}{6} \leq 11 \quad \therefore \frac{53}{4} < a \leq \frac{65}{4}$$

a は整数であるから, $14 \leq a \leq 16$

$a=14$ のとき, $\frac{29}{2} < x < 24$ これを満たす整数 x は 9 個より不適

$a=15$ のとき, $\frac{31}{2} < x < \frac{77}{3}$ これを満たす整数 x は 10 個より適する

$a=16$ のとき, $\frac{33}{2} < x < \frac{82}{3}$ これを満たす整数 x は 11 個より不適

よって, $a=15$

別解

不等式を解くと

$$a + \frac{1}{2} < x < \frac{5a+2}{3}$$

ここで, a は整数であるから

$$a+1, a+2, \dots, a+10$$

が解になればよい

このとき

$$a+10 < \frac{5a+2}{3} \leq a+11$$

となればよいから, これを解いて

$$14 < a \leq \frac{31}{2}$$

a は整数より, $a=15$

注 この問題も例4のようにグラフをかいて解いてもよいが, さすがに面倒である。 a が整数であるので, それに着目して上の2つの解答ように解くのがよい。

補6

連立不等式 $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ x^2 - (a^2 - 2a)x - a(a^2 - a) \leq 0 \end{cases}$ を①とおく。ただし、 a は正の定数とする。

(1) $a=3$ のとき、①を解け。

(2) ①を満たす整数 x が存在しないような、 a の値の範囲を求めよ。

(3) ①を満たす整数 x がちょうど6個存在するような、 a の値の範囲を求めよ。

(解説)

(1) $x^2 - 7x + 6 \geq 0$ より

$$(x-1)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x \leq 1, 6 \leq x$$

$a=3$ のとき、 $x^2 - (a^2 - 2a)x - a(a^2 - a) \leq 0$ は

$$x^2 - 3x - 18 \leq 0$$

$$(x+3)(x-6) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 6$$

よって、 $-3 \leq x \leq 1, x=6$

(2) $x^2 - (a^2 - 2a)x - a(a^2 - a) \leq 0$ より

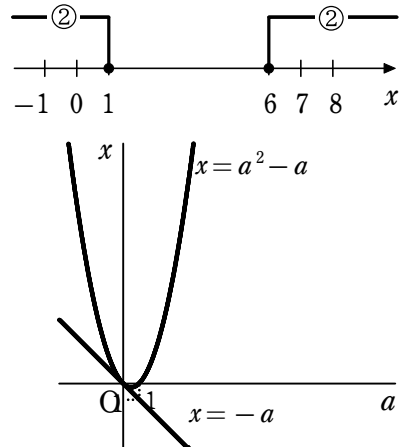
$$(x+a)\{x-(a^2-a)\} \leq 0$$

$a^2 \geq 0$ であるから $-a < a^2 - a$ より

$$-a \leq x \leq a^2 - a$$

条件を満たすためには、

$$0 < a < 1$$



(3) $a=3$ のとき、①の解は、(1)から $-3 \leq x \leq 1, x=6$ で、①を満たす整数 x はちょうど6個存在する。

(2)のグラフより、 a が増加すれば、 x の変域の幅は増加するから、①を満たす整数 x の個数が6であるための条件は $a \geq 3$ かつ

$$-4 < -a \text{ かつ } a^2 - a < 7$$

$$a < 4 \text{ かつ } \frac{1 - \sqrt{29}}{2} < a < \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$

よって

$$3 \leq a < \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$