

3.3 体積(1)

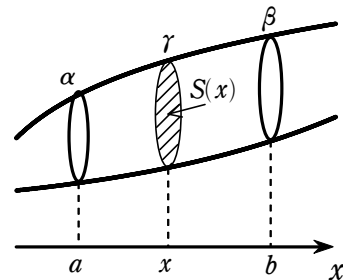
(1) 定積分と体積

面積と同様に，立体の体積についても， x 軸に垂直な平面で切った立体の断面の断面積を $S(x)$ とし，体積関数 $V(x)$ を考えて， $V'(x)=S(x)$ となることから体積を定積分で表すことができたり，区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる。

ここでは，体積を区分求積法の考えを利用して考える。

与えられた立体の，平行な 2 つの平面 α, β の間に挟まれた部分の体積 V を求める。

α, β に垂直な直線を x 軸にとり， x 軸と α, β との交点の座標を，それぞれ a, b とする。また， $a \leq x \leq b$ として， x 軸に垂直で， x 軸との交点の座標が x である平面 γ でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，次の公式が成り立つ。



立体の断面積と体積

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad \text{ただし, } a < b$$

区間 $[a, b]$ を n 等分し，その分点の座標を， a に近い方から順に

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$$

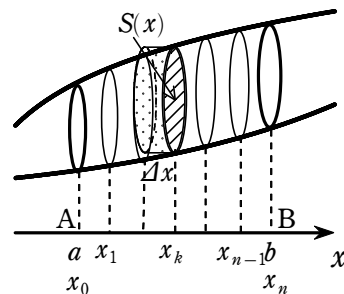
とします。また，

$$a = x_0, b = x_n, \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

とおく。

各分点を通り x 軸に垂直な平面でこの立体を分割し，分割した n 個の立体を，断面積が $S(x_k)$ で厚さが Δx の板状の立体であるとみなし，そのときの体積の和を V_n とすると

$$\begin{aligned} V_n &= S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + S(x_3)\Delta x + \dots + S(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x \end{aligned}$$



であり, $n \rightarrow \infty$ のとき, $V_n \rightarrow V$ と考えらる。

したがって, 定積分と和の極限の公式より

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x_k) \Delta x = \int_a^b S(x) dx$$

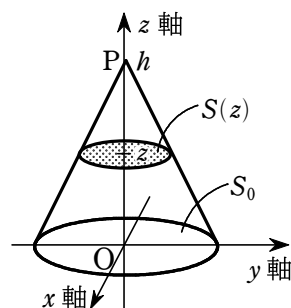
例1

図のように, 原点 O を中心とし, 方程式

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

で表される楕円がある。この楕円

で囲まれる平面を底面とし, 楕円上を1周する点と z 軸上の定点 $P(0, 0, h)$ を結ぶ直線によって作られる曲面が囲む立体の体積を V とする。



(1) 積分を用いて, 底面の楕円の面積 S_0 を求めよ。

(2) z 座標が z である z 軸上の点を通り, z 軸に垂直な平面による切り口の断面積 $S(z)$ を求めよ。

(3) 積分を用いて体積 V を求めよ。

解説

(1) $\frac{y^2}{4} = 1 - x^2$ より, $y = \pm 2\sqrt{1 - x^2}$

よって

$$S_0 = 4 \int_0^1 2\sqrt{1 - x^2} dx = 2\pi$$

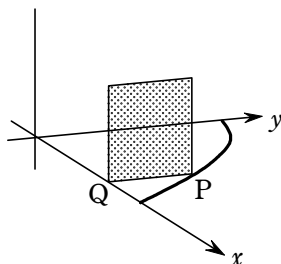
(2) $S(z) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S_0 = \frac{2\pi}{h^2} (h-z)^2$

(3) $V = \int_0^h S(z) dz = \frac{2\pi}{h^2} \left[-\frac{1}{3} (h-z)^3 \right]_0^h = \frac{2}{3} \pi h$

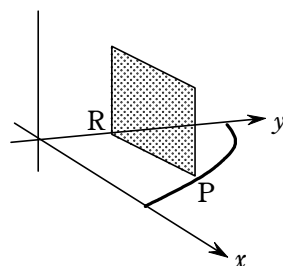
例2

xy 平面上の曲線 $C: y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ を考える。 C 上の点を P (x, y) として、 x 軸上に点 $Q(x, 0)$ 、および y 軸上に点 $R(0, y)$ をとる。

- (1) 線分 PQ を 1 辺とする正方形 L_1 を xy 平面に垂直に立てる。点 P が曲線 C 上を動くとき、 L_1 が通過してできる立体の体積 V_1 を求めよ。



- (2) 線分 PR を底辺とし、高さが y である長方形 L_2 を xy 平面に垂直に立てる。点 P が曲線 C 上を動くとき、 L_2 が通過してできる立体の体積 V_2 を求めよ。



解説説

- (1) x 軸に垂直な断面の断面積 $S(x)$ は、 $S(x) = \cos^2 x$ より

$$V_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

- (2) $PR = x$ であるから、 y 軸に垂直な断面の断面積 $S(y)$ は、 $S(y) = xy$ より

$$V_2 = \int_0^1 xy dy$$

$$y = \cos x \text{ より, } \frac{dy}{dx} = -\sin x dx$$

よって

$$V_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 x \cos x \cdot (-\sin x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-x \cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{8}$$

y	$0 \rightarrow 1$
x	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

例3

空間において、 x が $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、2点 $P(x, 0, \cos x)$,

$Q(x, 1 - \sin^2 x, 0)$ を通る直線 PQ が動いてできる曲面を S とする.

$R(x, 0, 0)$ とすると、 $\triangle PQR$ の面積は $\frac{1}{2} \boxed{} \cos x (1 - \sin^2 x)$ である.

このとき、 S と 3つの座標平面で囲まれる立体の体積は $\frac{1}{2} \boxed{}$ である.

(解説)

$$(ア) \triangle PQR = \frac{1}{2} PR \cdot QR = \frac{1}{2} \cos x (1 - \sin^2 x)$$

$$\begin{aligned} (イ) V &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

例4

半径 1 の円柱を、底面の直径を含み底面と角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) をなす平面で切ってできる小さい方の立体を考える。ただし、円柱の高さは $\tan \alpha$ 以上であるとする。

- (1) この立体の体積 V を求めよ。
- (2) 切り口の面積 A を求めよ。
- (3) この立体の側面積 B を求めよ。

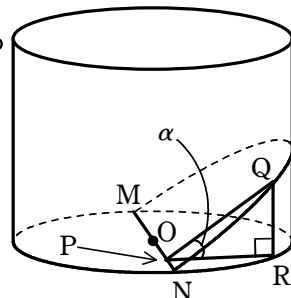
(解説)

(1) 右図のように、底面の中心を O とし、直径 MN を含み底面と角 α をなす平面で円柱を切る線分 ON 上に $OP = x$ となるように点 P をとる点 P を通り、線分 MN に垂直な平面で小さい方の立体を切った切り口の面積 $S(x)$ は

$PR = \sqrt{1 - x^2}$, $QR = \sqrt{1 - x^2} \tan \alpha$ より

$$S(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{1 - x^2})^2 \tan \alpha = \frac{1}{2} (1 - x^2) \tan \alpha$$

よって、求める体積 V は、



$$V = 2 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x^2) \tan \alpha dx$$

$$= \tan \alpha \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \tan \alpha$$

(2) $PQ = \frac{PR}{\cos \alpha}$ であるから，小さい方の立体の底面積を S とすると

$$A = \frac{S}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \cos \alpha}$$

(3) 右図のように，底面の円周上に $\angle SON = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) となるような点 S をとる

点 S を通り，底面に垂直な直線と切り口との交点を T とし，

点 S から線分 MN に垂線を下ろし，線分 MN との交点を U とすると

$$SU = OS \sin \theta = \sin \theta$$

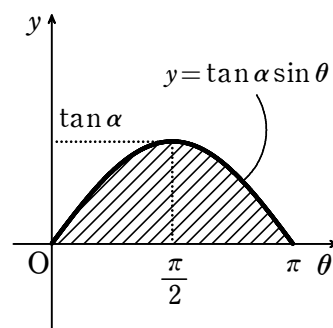
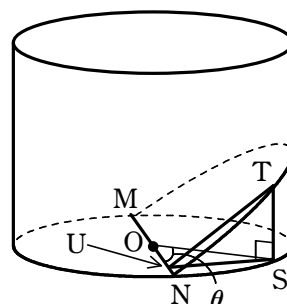
$$ST = SU \tan \alpha = \tan \alpha \sin \theta$$

$\widehat{NS} = \theta$ であるから，この立体の展開図の側面は右図のようになる

よって，求める面積は

$$B = \int_0^\pi \tan \alpha \sin \theta d\theta$$

$$= \tan \alpha \left[-\cos \theta \right]_0^\pi = 2 \tan \alpha$$



例5

(1) 座標空間の平面 $z = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) 上で x 軸， y 軸までの距離がいずれも 1 以下である領域の面積を求めよ。

(2) 座標空間において， x 軸， y 軸までの距離がいずれも 1 以下である部分の体積を求めよ。

(3) 座標空間において， x 軸， y 軸， z 軸までの距離がいずれも 1 以下である部分の体積を求めよ。

解説

(1) 平面 $z=t$ 上の点 (x, y, t) について,

x 軸との距離は $\sqrt{y^2+t^2}$, y 軸との距離は $\sqrt{x^2+t^2}$

題意より

$$\sqrt{y^2+t^2} \leq 1, \sqrt{x^2+t^2} \leq 1$$

$$\therefore -\sqrt{1-t^2} \leq y \leq \sqrt{1-t^2}, -\sqrt{1-t^2} \leq x \leq \sqrt{1-t^2}$$

よって, 領域は平面 $z=t$ で 1 辺が $2\sqrt{1-t^2}$ の正方形より

求める面積は $4(1-t^2)$

(2) 求める体積は

$$\int_{-1}^1 4(1-t^2)dt = 8 \int_0^1 (1-t^2)dt = 8 \left[t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{16}{3}$$

(3) 点 (x, y, t) と z 軸との距離が $\sqrt{x^2+y^2}$ であり

(1) から, $x^2+y^2 \leq 2(1-t^2)$ より

$2(1-t^2) \leq 1$ を満たす区間では(2)と同様に断面積の積分を考える

この条件を満たす t の範囲は

$$t^2 \geq \frac{1}{2} \quad \therefore t \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq t$$

x 軸, y 軸, z 軸の対称性より,

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$ における断面積の積分で求められる体積の 6 倍と

$x^2 \leq \frac{1}{2}, y^2 \leq \frac{1}{2}, z^2 \leq \frac{1}{2}$ の領域, すなわち 1 辺が $\sqrt{2}$ の立方体

の体積を合わせたものが求める体積である

よって, 求める体積は

$$6 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 4(1-t^2)dt + (\sqrt{2})^3 = 24 \left[t - \frac{1}{3}t^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 + 2\sqrt{2} = 16 - 8\sqrt{2}$$

〔注〕(2)は x 軸, y 軸を軸とする底面が半径 1 の円の円柱の共通部分の体積, (3)は, x 軸, y 軸, z 軸を軸とする底面が半径 1 の円の円柱の共通部分の体積を求めている。

例6

(1) 平面上の、1辺の長さが1の正方形 ABCD を考える。点 P が正方形 ABCD の辺の上を1周するとき、点 P を中心とする半径 r の円 (内部を含む) が通過する部分の面積 $S(r)$ を求めよ。

(2) 空間内の、1辺の長さが1の正方形 ABCD を考える。点 P が正方形 ABCD の辺の上を1周するとき、点 P を中心とする半径1の球 (内部を含む) が通過する部分の体積 V を求めよ。

解説

(1)(i) $0 < r < \frac{1}{2}$ のとき

円が通過する領域は右図の斜線部

$$\begin{aligned} S(r) &= 4 \times \frac{1}{4} \pi r^2 + 4 \times 1 \cdot r + 1^2 - (1 - 2r)^2 \\ &= \pi r^2 + 4r + 1 - (1 - 4r + 4r^2) = (\pi - 4)r^2 + 8r \end{aligned}$$

(ii) $r \geq \frac{1}{2}$ のとき

円が通過する領域は右図の斜線部

$$S(r) = 4 \times \frac{1}{4} \pi r^2 + 4 \times 1 \cdot r + 1^2 = \pi r^2 + 4r + 1$$

(i), (ii)より

$$0 < r < \frac{1}{2} \text{ のとき } S(r) = (\pi - 4)r^2 + 8r$$

$$r \geq \frac{1}{2} \text{ のとき } S(r) = \pi r^2 + 4r + 1$$

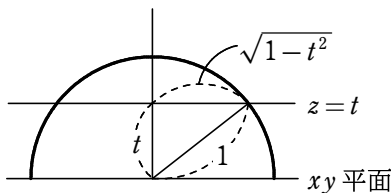
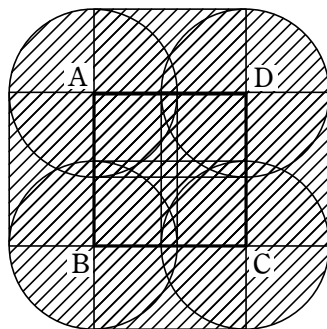
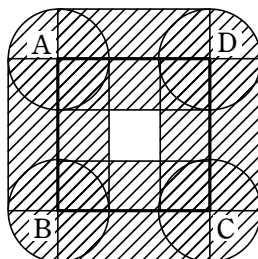
(2) xy 平面上に正方形 ABCD があるとする

点 P を中心とする半径1の球が通過する部分を平面 $z = t$ ので切ると、その断面は半径 $\sqrt{1 - t^2}$ の円の中心が正方形 ABCD の辺上を1周するとき、円が通過する部分の面積に等しいから

(1) より, $S(\sqrt{1 - t^2})$

対称性より

$$V = 2 \int_0^1 S(\sqrt{1 - t^2}) dt$$



$t \geq 0$ において, $\sqrt{1-t^2} = \frac{1}{2}$ とすると

$$1-t^2 = \frac{1}{4}$$

$$t^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき } \sqrt{1-t^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < t \leq 1 \text{ のとき } 0 \leq \sqrt{1-t^2} < \frac{1}{2}$$

より

$$V = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \{ \pi(1-t^2) + 4\sqrt{1-t^2} + 1 \} dt + 2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \{ (\pi-4)(1-t^2) + 8\sqrt{1-t^2} \} dt$$

$$= 2 \left[(\pi+1)t - \frac{\pi}{3}t^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 8 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2} dt + 2 \left[(\pi-4) \left(t - \frac{1}{3}t^3 \right) \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 + 16 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

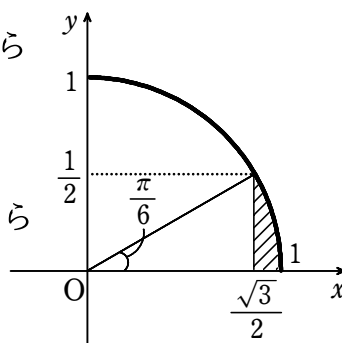
$$= \sqrt{3}(\pi+1) - \frac{\sqrt{3}}{4}\pi + 2(\pi-4) \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) + 8 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt + 8 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ は半径 1 の四分円の面積を表すから

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ は右図の斜線部の面積を表すから

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$



より

$$V = \sqrt{3}(\pi+1) - \frac{\sqrt{3}}{4}\pi + 2(\pi-4) \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) + 8 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$= 4\pi + 3\sqrt{3} - \frac{16}{3}$$

例7

$a > 0$ とする. 不等式 $0 \leq z \leq y^2 - x^2$, $|y| \leq a$ を満たす領域について
 (1) この領域と平面 $y = t$ ($|t| \leq a$) との共通部分の面積 $S(t)$ を求めよ.
 (2) この領域の体積を求めよ.

(解説)

(1) $0 \leq z \leq y^2 - x^2 \dots \textcircled{1}$

y の代わりに $-y$ を代入しても $\textcircled{1}$ は変わらないから,

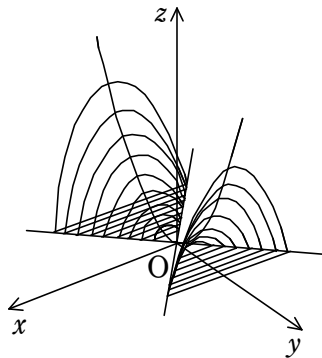
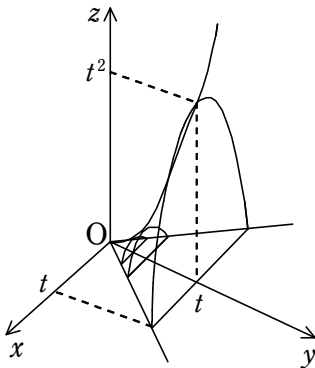
$\textcircled{1}$ の表す領域は zx 平面に関して対称である

求める体積は, $0 \leq y \leq a$ の範囲で考えて 2 倍すればよい

平面 $y = t$ による断面は, 不等式 $0 \leq z \leq t^2 - x^2$ の表す領域で,
 下の左図のようになる

断面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = 2 \int_0^t (t^2 - x^2) dx = 2 \left[t^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^t = \frac{4}{3} t^3$$



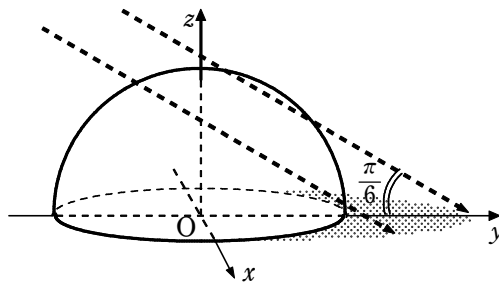
(2) 求める体積 V は

$$V = 2 \int_0^a \frac{4}{3} t^3 dt = 2 \left[\frac{1}{3} t^4 \right]_0^a = \frac{2}{3} a^4$$

例8

座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように、 y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0, \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 球の $z \geq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。 k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき、 xy 平面上の直線 $x=k$ において、球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。
- (2) xy 平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
- (3) $z \geq 0$ において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。



解説

(1) $-1 < k < 1$ のとき、平面 $x=k$ による球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の切り口の図形は

$$\text{円 } y^2 + z^2 = 1 - k^2$$

$O'(k, 0, 0)$ とする

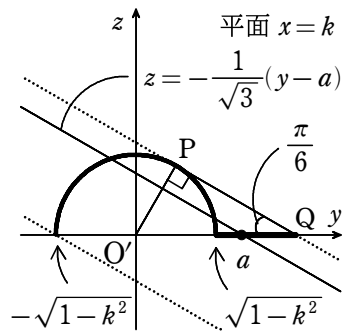
xy 平面上の直線 $x=k$ において、光が当たらない部分の y 座標の範囲は、太陽光線と平行であるような平面 $x=k$ 上の

$$\text{直線 } z = -\frac{1}{\sqrt{3}}(y-a) \cdots \textcircled{1}$$

が半円 $y^2 + z^2 = 1 - k^2$ ($z \geq 0$) $\cdots \textcircled{2}$ と共有点をもつような a の範囲と等しい

直線 $\textcircled{1}$ が半円 $\textcircled{2}$ に接するとき、その接点を P とし、直線 $\textcircled{1}$ と xy 平面との交点を Q とすると $\angle O'PQ = \frac{\pi}{2}$, $\angle PQO' = \frac{\pi}{6}$ より

$$O'Q = 2O'P = 2\sqrt{1-k^2}$$



よって、光が当たらない部分の y 座標の範囲のうち、
球の外である範囲を求めて

$$\sqrt{1-k^2} \leq y \leq 2\sqrt{1-k^2}$$

(2) (1)より、 xy 平面上において、球の外で
光が当たらない部分は、右図の斜線部
求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (2\sqrt{1-k^2} - \sqrt{1-k^2}) dk \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-k^2} dk \end{aligned}$$

$\int_{-1}^1 \sqrt{1-k^2} dk$ は半径 1 の半円の面積に等しいから

$$S = \frac{\pi}{2}$$

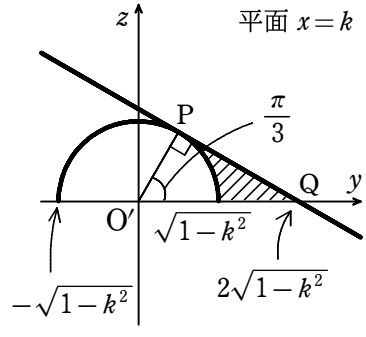
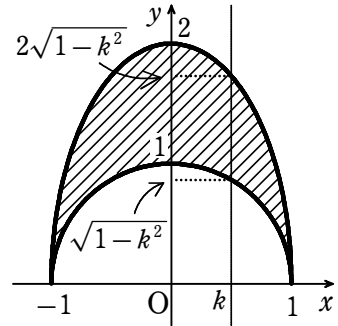
(3) $z \geq 0$ において、球の外で光が当たらない
部分の平面 $x=k$ における切り口の面積を
 $S(k)$ とすると

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-k^2} \cdot \sqrt{1-k^2} \sin \frac{\pi}{3} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{1-k^2})^2 \cdot \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) (1-k^2)$$

よって、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(k) dk = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \int_{-1}^1 (1-k^2) dk \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cdot 2 \int_0^1 (1-k^2) dk = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \left[k - \frac{k^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2(3\sqrt{3} - \pi)}{9} \end{aligned}$$



補1

xy 平面上の原点を中心とする単位円を底面とし、点 $P(t, 0, 1)$ を頂点とする円錐を K とする。

t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、円錐 K の表面および内部が通過する

部分の体積は $\frac{\pi + \boxed{}}{\boxed{}}$ である。

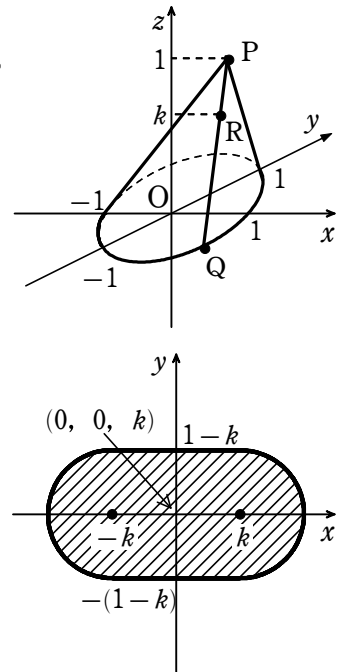
解説

t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき円錐 K を平面 $z=k$ で切った切り口は右図のようになる
斜線部分の面積 $S(k)$ は

$$\begin{aligned} S(k) &= \pi(1-k)^2 + 2(1-k) \cdot 2k \\ &= \pi(k-1)^2 + 4k - 4k^2 \end{aligned}$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(k) dk \\ &= \int_0^1 \{ \pi(k-1)^2 + 4k - 4k^2 \} dk \\ &= \left[\frac{\pi}{3}(k-1)^3 + 2k^2 - \frac{4}{3}k^3 \right]_0^1 = \frac{\pi + 2}{3} \end{aligned}$$



補2

xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある. どのような a に対しても, 平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0, 0, a)$, $(1, 0, a)$,

$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, a)$ を頂点とする正三角形である. また, どのような a に対しても, 平面 $y=a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0, a, 0)$,

$(0, a, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $(1, a, \frac{1}{\sqrt{3}})$ を頂点とする正三角形である. このとき, 立体 K と L の共通部分の体積を求めよ.

解説

立体 K と L の共通部分を平面 $y=t$ で切ったときの切り口を考える
 立体 K の xy 平面への射影は左図の正三角形であるから

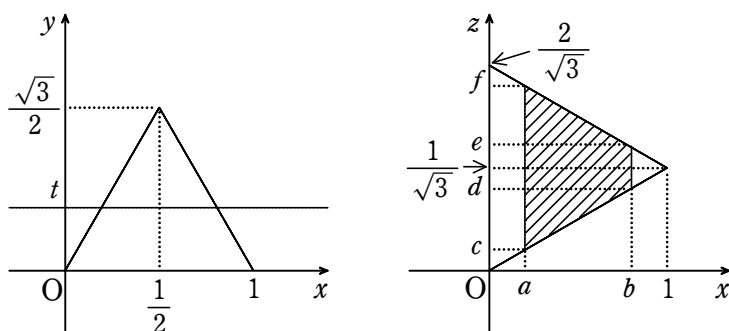
$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、立体 K と平面 $y=t$ の共通部分の x の範囲は

$$\frac{1}{\sqrt{3}}t \leq x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t$$

また、立体 L の $y=t$ による切り口は

$(0, t, 0), \left(0, t, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(1, t, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形だから

立体 K と L の共通部分の平面 $y=t$ による切り口は、右図の斜線部のような台形となる



右図において

$$\left[a = \frac{t}{\sqrt{3}}, \quad b = 1 - \frac{t}{\sqrt{3}}, \quad c = \frac{t}{3}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{t}{3}, \quad e = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{3}, \right. \\ \left. f = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t}{3} \right]$$

この台形の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \left[\left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}t \right) - \frac{1}{3}t \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}t \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}t \right) \right\} \right] \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t \right) - \frac{1}{\sqrt{3}}t \right] \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}t \right)$$

よって、K と L の共通部分の体積 V は

$$V = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}t \right) dt \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[t - \frac{1}{\sqrt{3}}t^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

補3

空間に8個の点 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $F(1, 0, 1)$, $G(1, 1, 1)$, $H(0, 1, 1)$ をとる。

(1) 四面体 $ACFH$ を平面 $z=t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切断したとき、切断面の面積を t で表せ。

(2) 四面体 $ACFH$ と四面体 $BDEG$ の重なり合う部分の体積を求めよ。

(解説)

(1) 四面体 $ACFH$ の平面 $z=t$ による切り口

$PQRS$ を図のようにとると

$$P(0, t, t), Q(t, 0, t),$$

$$R(1, 1-t, t), S(1-t, 1, t)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(t, -t, 0), \overrightarrow{SR}=(t, -t, 0) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$$

よって、四角形 $PQRS$ は平行四辺形

$$\overrightarrow{PS}=(1-t, 1-t, 0) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS}=t(1-t)-t(1-t)=0$$

$$\therefore \angle QPS=90^\circ$$

よって、四角形 $PQRS$ は長方形であるから

切断面の面積は

$$|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{t^2 + (-t)^2} \sqrt{(1-t)^2 + (1-t)^2} = 2t(1-t)$$

(2) 四面体 $ACFH$ と四面体 $BDEG$ の重なり

合う部分を平面 $z=t$ ($0 \leq t \leq \frac{1}{2}$) で切ると

断面は右図のようになる

この断面は、1辺が $\sqrt{2}t$ の正方形より

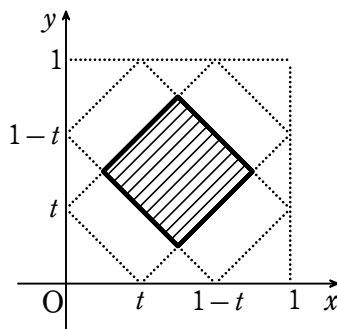
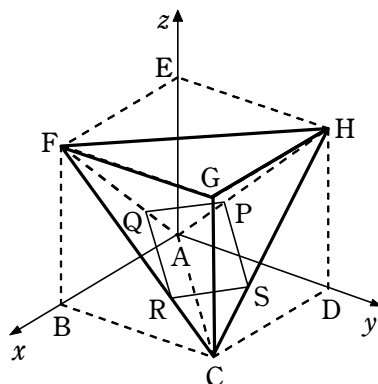
断面積 $S(t)$ は

$$S(t)=(\sqrt{2}t)^2=2t^2$$

重なり合う部分は平面 $z=\frac{1}{2}$ に関して対称であるから、

求める体積 V は

$$V=2 \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^2 dt = 4 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$



補4

(1) 0以上の整数 n に対し, $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおくとき, C_{n+2}
 $= \frac{n+1}{n+2} C_n$ を示せ。

ただし, $\cos^0 x = 1$ と定める。

(2) 座標空間内で, 連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad z + 2x^2 - x^4 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

の表す領域の体積を求めよ。

解説

$$\begin{aligned} (1) C_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x (\sin x)' dx \\ &= \left[\cos^{n+1} x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cos^n x (-\sin x) \sin x dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^2 x dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= (n+1)(C_n - C_{n+2}) \\ (n+2)C_{n+2} &= (n+1)C_n \quad \therefore C_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} C_n \end{aligned}$$

(2) 与えられた領域を平面 $x=t$ (ただし $t \geq 0$) で切る

切り口上の点 (t, y, z) の満たす不等式は

$$t^2 + y^2 \leq 1, \quad z + 2t^2 - t^4 \leq 1, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \dots \textcircled{1}$$

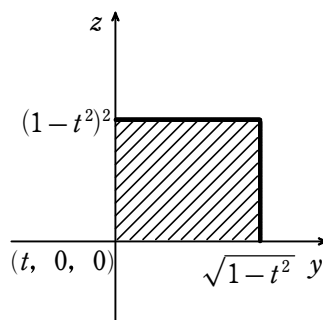
これを満たす実数 y が存在することと, $1 - t^2 \geq 0$ は同値で, $t \geq 0$ より
 $0 \leq t \leq 1$

このとき, ①より

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-t^2}, \quad 0 \leq z \leq (1-t^2)^2$$

よって, 平面 $x=t$ における切り口は
 右図の斜線部分である

この面積は $(1-t^2)^{\frac{5}{2}}$



求める体積を V とおくと

$$V = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt$$

$$t = \sin \theta \text{ とおくと, } \frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \cdot \cos \theta d\theta = C_6$$

t	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$(1) \text{ から, } C_6 = \frac{5}{6} C_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} C_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} C_0, \quad C_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$V = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} \pi$$