

高3数学 発展問題演習 演習 5. 三角比

① [弘前大]

四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、対角線 AC, BD の長さはともに $\sqrt{3}$ であるとする。このとき、四角形 ABCD の 4 辺の長さの和 $l = AB + BC + CD + DA$ のとり得る最大の値を求めよ。

② [県立広島大]

一辺の長さが 2 の正三角形 ABC と、その外接円が O がある。弧 AB 上の点 P は、

$\angle BCP = \theta$ が $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たすように動く。

- (1) 線分 PB の長さを θ を用いて表せ。
- (2) $PA + PB + PC$ の最大値を求めよ。
- (3) $PA^2 + PB^2 + PC^2$ は一定であることを示せ。
- (4) $PA \cdot PB \cdot PC$ の最大値を求めよ。

③ [2008 早稲田大]

正三角形 ABC の内部にある点を P とする。

$PA = 1$, $PB = 2$, $\angle APB = 120^\circ$ のとき、PC の長さを求めよ。

④ [2008 滋賀大]

$\triangle ABC$ において、 $BC = 1$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ とする。 $\triangle ABC$ の頂点とは異なる点 P, Q, R がそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあり、 $\triangle PQR$ は正三角形であるとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\angle CPQ = \angle BRP$ であることを示せ。
- (2) $BP = x$ とするとき、CQ を x を用いて表せ。
- (3) $\triangle PQR$ の面積 S を x を用いて表せ。また、 S の最小値とそのときの x の値を求めよ。

⑤ [1999 東京工業大]

3 辺の長さが 1, 1, a である三角形の面積を、周上の 2 点を結ぶ線分で 2 等分する。それらの線分の長さの最小値を a を用いて表せ。

高3数学 発展問題演習 演習 5. 三角比

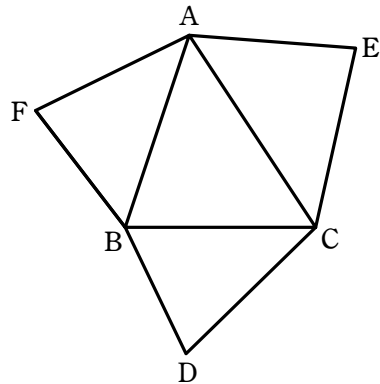
6 [2002 同志社大]

平面上に、半径1の円 C と、同じ半径 r をもつ異なる n 個の円 $C_1, C_2, \dots, C_n$ があり、それらは互いに重なることはない. C_1 と C_2, C_2 と $C_3, \dots, C_{n-1}$ と C_n, C_n と C_1 はそれぞれ外接しており、また、 C は C_i ($i=1, \dots, n$)のすべてに外接しているとする. ただし、 $n \geq 3$ とする.

- (1) r を n で表せ.
- (2) $r > 1$ となるような n の値をすべて求めよ.

7 [2024 金沢大]

右の図は、ある四面体 T の展開図である。ここで、 $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{13}$, $BF = \sqrt{5}$, $AF = \sqrt{7}$, および $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$ である。このとき、 $\triangle ABC$ の面積および四面体 T の体積を求めよ。



8 [2024 京都大]

四面体OABCが次を満たすとする。

$$OA = OB = OC = 1, \angle COA = \angle COB = \angle ACB, \angle AOB = 90^\circ$$

このとき、四面体OABCの体積を求めよ。

高3数学 発展問題演習 演習 5. 三角比

9 [2022 慶応義塾大]

半径 $4\sqrt{2}$ の球面 S 上に 3 点 A, B, C があり, 線分 AB, BC, CA の長さはそれぞれ $AB=4\sqrt{6}, BC=10, CA=6$ とする。

(1) $\cos \angle ABC =$ ^ア である。平面 ABC で球面 S を切った切り口の円を T とする。

T の半径は ^イ である。点 D が円 T 上を動くとき, $\triangle DAB$ の面積の最大値は ^ウ である。

(2) 球面 S の中心 O から平面 ABC に下ろした垂線 OH の長さは ^エ である。

(3) 点 E が球面 S 上を動くとき, 三角錐 $EABC$ の体積の最大値は ^オ である。

10 [2015 岐阜大]

$\triangle ABC$ において, $AB=2, BC=3, CA=4$ とする。 $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を P , $\angle B$ の二等分線が辺 AC と交わる点を Q とする。また, 線分 AP と線分 BQ の交点を O とする。

(1) $\triangle ABC$ の面積を S とする。 S の値を求めよ。

(2) 線分 AP の長さを求めよ。

(3) 線分 AO の長さを求めよ。

(4) $\triangle ABC$ を線分 AP で折り曲げて 4 点 A, P, C, B を頂点とする四面体を作る。このようにしてできる四面体の体積の最大値を求めよ。

高3数学 発展問題演習 演習 5. 三角比

11 [2016 芝浦工業大]

1 辺の長さが 1 の正三角形の高さは ^ア である。ま

た，正五角形 ABCDE の 1 辺の長さを 1 とし，線分 AD
と線分 CE の交点を F とするとき，2 つの二等辺三角形

ACD と CDF は相似だから，線分 AC の長さは ^イ

である。これより， $\cos 36^\circ =$ ^ウ である。更に，

正二十面体は 20 個の合同な正三角形の辺どうしをつなぎ

合わせて得られる，右のような正多面体であり，各頂点では，5 個の正三角形が集まって
いる。正二十面体の 1 辺の長さを 1，隣り合う 2 面のなす角を θ とするとき，

$\cos \theta =$ ^エ である。これより，4 つの平面 ABG，BCG，ABC，ACG で囲まれた

部分の体積は ^オ である。

