53 [2006 自治医科大]

実数 x, y, z は

$x+y+3z-19=0$, $3x-y+z-13=0$, $y\geqq 1$, $z\geqq 1$

を満たしながら変わる。このとき,

$y=$ ア☐ $x-$ イ☐,　$z=$ ウ☐ $-x$

であるから, x のとりうる値の範囲は エ☐ $\leqq x\leqq$ オ☐ である。

したがって, $x^2+y^2+z^2$ は

$x=$ カ☐, $y=$ キ☐, $z=$ ク☐ のとき最大値 ケ☐,

$x=$ コ☐, $y=$ サ☐, $z=$ シ☐ のとき最小値 ス☐

をとる。

$\begin{cases} x+y+3z=19 \cdots ① \\ 3x-y+z=13 \cdots ② \end{cases}$

①+②より

$4x+4z=32$

$\therefore z=8-x$ …③

②,③より

$y=3x+(8-x)-13$

$\therefore y=2x-5$

$y\geqq 1$, $z\geqq 1$より

$\begin{cases} 2x-5\geqq 1 & \therefore x\geqq 3 \\ 8-x\geqq 1 & \therefore x\leqq 7 \end{cases}$　　$\therefore 3\leqq x\leqq 7$

$x^2+y^2+z^2=x^2+(2x-5)^2+(8-x)^2$

$=6x^2-36x+89$

$=6(x-3)^2+35$

$x=3$のとき 最小　最小値 35 $(x=3, y=1, z=5)$

$x=7$ 〃 大 131 $(x=7, y=9, z=1)$

54

実数 x, y, z が $2x+5y-4z=9$, $x+3y-3z=5$ を満たすとき

(1) x と y を z で表せ.

(2) $x^2+y^2+z^2$ が最小となる x, y, z を求めよ.

(3) $x^2+y^2+z^2$ が最小となる整数 x, y, z を求めよ.

55 [2007 首都大学東京]

実数 x, y, z についての5つの条件

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \\ x+y+z=12 \\ 5x-3z=0 \end{cases}$$

に対して, 次の問いに答えよ。

(1) 実数 x, y, z が上記5つの条件を満たすとき, 不等式 $x<\dfrac{9}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 x, y, z が上記5つの条件を満たすとき, 積 xyz を x の関数 $f(x)$ として表せ。

(3) (2)の $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(4) 上記5つの条件を満たす実数の組 $(x,\ y,\ z)$ のうち, 積 xyz を最大にするものを求めよ。

(1) $\begin{cases} x+y+z=12 \cdots ① \\ 5x-3z=0 \cdots ② \end{cases}$

②より

$z=\frac{5}{3}x$

①より

$y=12-x-z=12-\frac{8}{3}x$

$y>0$, $z>0$より

$\begin{cases} x>0 \\ 12-\frac{8}{3}x>0 \end{cases}$　$\therefore x<\frac{9}{2}$

(2) $f(x)=x\left(12-\frac{8}{3}x\right)\cdot\frac{5}{3}x$　　3.4.5

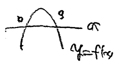
$=-\frac{40}{9}x^3+20x^2$

(3) $f'(x)=-\frac{40}{3}x^2+40x$

$=-\frac{40}{3}x(x-3)$

(4) $f'(x)=0$とすると $x=0, 3$

x	0		3		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	最大	↘	



$x=3$で極大かつ最大

最大値 $f(3)=60$

このとき $(x, y, z)=(3, 4, 5)$

56 [Ⅰ. 2010 神戸薬科大　Ⅱ. 2017 大阪大]

Ⅰ. 次の条件を満たす3つの実数 x, y, z がある。

$x\leqq y\leqq z$, $x+y+z=6$, $z-x=2$

(1) x のとりうる値の範囲は ☐ である。

(2) 積 xyz を x の式で表すと ☐ である。

(3) 積 xyz のとりうる値の範囲は ☐ である。

Ⅱ. 実数 x, y, z が $x+y+z=1$, $x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2) $z\geqq 0$ のとき, xyz が最大となる z の値を求めよ。

57 [早稲田大]

x, y, z が実数で $x+y+z=1$ のとき
(1) $xy+yz+zx$ の最大値を求めよ．
(2) $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ．

(1) $x+y+z=1$ より $z=1-x-y$

$$\begin{aligned}xy+yz+zx &= xy+(x+y)\{1-(x+y)\}\\ &= xy+(x+y)-(x+y)^2\\ &= -x^2-xy-y^2+x+y\\ &= -x^2+(1-y)x-y^2+y\\ &= -\left(x-\frac{1-y}{2}\right)^2+\frac{(1-y)^2}{4}-y^2+y\\ &= -\left(x-\frac{1-y}{2}\right)^2-\frac{3}{4}y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\\ &= -\left(x-\frac{1-y}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$y=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{3}$ のとき 最大で 最大値 $\frac{1}{3}$ //

(2) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
$=1-2(xy+yz+zx)$ より

$xy+yz+zx$ が最大のとき
$x^2+y^2+z^2$ は最小．

最小値 $\frac{1}{3}$ //

58

実数 x, y, z が $x+2y+z=1$ をみたしながら変わるとき，$2x^2-y^2+z^2$ の最小値とそのときの x, y, z の値を求めよ．

59 [慶応義塾大]

実数 x, y, z が $x+y+z=6$, $xyz=8$ をみたすとき，z のとりうる値の範囲を定めると，

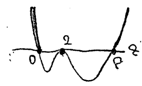
$z<$ □ または $z=$ □ または □ $\leqq z$ である．

$x+y+z=6$ より $x=6-(y+z)$
$xyz=8$ より
$\{6-(y+z)\}yz=8$
$6yz-y^2z-yz^2=8$
$zy^2+(z^2-6z)y+8=0$ …①

$z=0$ のとき 左辺$=8$, 右辺$=0$ より $z\neq 0$
$z\neq 0$ のとき y は実数であるから
①を y の方程式とみて，判別式を D とすると $D\geqq 0$ より

$D=(z^2-6z)^2-32z\geqq 0$
$z^2(z-6)^2-32z\geqq 0$
$z^4-12z^3+36z^2-32z\geqq 0$
$z(z^3-12z^2+36z-32)\geqq 0$
$z(z-2)(z^2-10z+16)\geqq 0$
$z(z-2)^2(z-8)\geqq 0$
$\therefore z<0$, $z=2$, $z\geqq 8$ //

2	1	−12	36	−32
		2	−20	32
	1	−10	16	0



60 [(3) 2003 熊本県立大]

(1) x, y, z が実数で，$x+y=1$, $x^2+y^2+z^2=1$ をみたすとき，z のとり得る範囲を求めよ．
(2) x, y, z は実数で，$x+y+z=4$, $xy+yz+zx=-3$ のとき，x のとりうる値の範囲を求めよ．
(3) x，y，z を実数とする．$x+y+z=0$，$xyz=2$ であるとき，z のとりうる値の範囲を求めよ．

61 [Ⅰ. 2011 武庫川女子大　Ⅱ. 2017 日本女子大　Ⅲ. 早稲田大]

Ⅰ. 3つの実数 x, y, z は次の条件を同時に満たす。

$$\begin{cases} 4x+y+z=0 \\ 6x^2-yz-18=0 \end{cases}$$

このとき，x のとりうる値の範囲は ${}^{ア}\boxed{} \leqq x \leqq {}^{イ}\boxed{}$ である。

また，$-2x^3+y^2+z^2$ は $x={}^{ウ}\boxed{}$，$y={}^{エ}\boxed{}$，$z={}^{オ}\boxed{}$ のとき最小値 ${}^{カ}\boxed{}$ をとる。

Ⅱ. 実数 x, y, z が $x^2+y^2+z^2=3$，$y+z=\sqrt{3}$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x^3+y^3+z^3$ を x の式で表せ。

(2) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $x^3+y^3+z^3$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

Ⅲ. 実数 x, y, z が $x+y+z=2, xy+yz+zx=1$ を満たす.

(1) z のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) xyz を z の式で表せ.

(3) xyz の最小値と，そのときの x, y, z の値を求めよ.

62 [Ⅰ. 2007 名城大　Ⅱ. 2011 岐阜聖徳学園大　Ⅲ. 学習院大　Ⅳ. 東京都立大]

Ⅰ. x, y, z は，$x=1-y-z$，$x^2=1+yz$ を満たす実数とする。

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $x^3+y^3+z^3$ を x を用いて表せ。

(3) $x^3+y^3+z^3$ の最大値，最小値を求めよ。

Ⅱ. a, b, c は0以上の実数で $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{7}{4} \end{cases}$ を満たしている。

(1) c のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $a^3+b^3+c^3$ の最大値を求めよ。

Ⅲ. 実数 x, y, z が等式 $x^2+y^2+z^2=1, xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}$ を同時に満たす.

(1) $x+y+z$ の値を求めよ.

(2) xyz のとり得る値の範囲を求めよ.

Ⅳ. 実数 x, y, z が $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=6$ を満たすとき

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) $x^3+y^3+z^3$ の最大値と最小値を求めよ.

63 [京都府立医科大]

x, y, z は実数で，$x+2y+3z=1, xy+yz+zx=-1$ のとき，$x+y+z$ の最大値と最小値を求めよ.

$x+y+z=k$ とおく …①

$x+2y+3z=1$ …②

②−①より

$y+2z=1-k$

$\therefore y=-2z+1-k$

②より

$x=-2y-3z+1$

$=-2(-2z+1-k)-3z+1$

$=z+2k-1$

$xy+yz+zx=-1$ より

$(z+2k-1)(-2z+1-k)+z(-z+k)=-1$

$-3z^2+(1-k-4k+2+k)z+(2k-1)(1-k)+1=0$

$-3z^2+(-4k+3)z-2k^2+3k=0$

$3z^2+(4k-3)z+2k^2-3k=0$

z は実数であるから

判別式を D とすると $D \geqq 0$ より

$D=(4k-3)^2-12(2k^2-3k)$

$=-8k^2+12k+9 \geqq 0$

$8k^2-12k-9 \leqq 0$

$\therefore \dfrac{3-3\sqrt{3}}{4} \leqq k \leqq \dfrac{3+3\sqrt{3}}{4}$

よって

最大値 $\dfrac{3+3\sqrt{3}}{4}$

小 $\dfrac{3-3\sqrt{3}}{4}$ //

高3数学 最大・最小問題

$\boxed{61}$

I. $\begin{cases} 4x+y+z=0 \cdots ① \\ 6x^2-yz-18=0 \cdots ② \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} y+z=-4x \\ yz=6x^2-18 \end{cases}$

$t^2-(y+z)t+yz=0$ すなわち

$t^2+4xt+6x^2-18=0$ は y, z を2解とする方程式である

y, z は実数であるから判別式をDとすると

$D \geqq 0$ より

$D/4 = 4x^2-(6x^2-18) \geqq 0$

$x^2 \leqq 9 \qquad \therefore -3 \leqq x \leqq 3$

$-2x^3+y^2+z^2 = -2x^3+(y+z)^2-2yz$

$= -2x^3+16x^2-2(6x^2-18)$

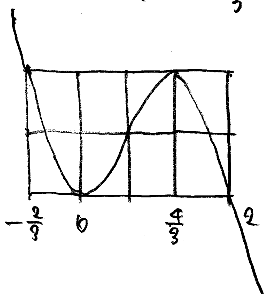
$= -2x^3+4x^2+36$

$f(x) = -2x^3+4x^2+36 \ (-3 \leqq x \leqq 3)$ とおく

$f'(x) = -6x^2+8x$

$= -2x(3x-4)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0, \frac{4}{3}$



$x=3$ のとき最小

最小値 $f(3) = -54+36+36 = 18$

このとき

$x=3, y=-6, z=-6$

II. (1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \to y^2+z^2=3-x^2 \\ y+z=\sqrt{3} \end{cases}$

$(y+z)^2 = y^2+z^2+2yz$ より

$3 = 3-x^2+2yz$

$\therefore yz = \frac{x^2}{2}$

(2) $t^2-(y+z)t+yz=0$ すなわち

$t^2-\sqrt{3}t+\frac{x^2}{2}=0$ は y, z を2解とする2次方程式である

y, z は実数であるから判別式をDとすると

$D \geqq 0$ より

$D = 3-2x^2 \geqq 0$

$x^2 \leqq \frac{3}{2} \qquad \therefore -\frac{\sqrt{6}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{6}}{2}$

(3) $x^3+y^3+z^3 = x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)$

$= x^3+3\sqrt{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt{3}$

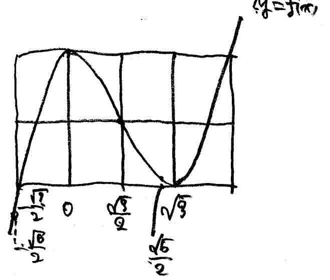
$= x^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2+3\sqrt{3}$

$f(x) = x^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2+3\sqrt{3} \ \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ とおく

$f'(x) = 3x^2-3\sqrt{3}x$

$= 3x(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$ とすると $x=0, \sqrt{3}$



$x=0$ のとき最大　最大値 $3\sqrt{3}$

$x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$　〃小　〃小　$\frac{3}{4}(\sqrt{3}-\sqrt{6})$

III. (1) $x+y+z=2$ より $x+y=2-z$

$xy+yz+zx=1$ より

$xy+(x+y)z=0$

$\therefore xy=z(z-2)$

$t^2-(x+y)t+xy=0$ すなわち

$t^2-(2-z)t+z^2-2z=0$ は x, y を2解とする

2次方程式である

x, y は実数であるから判別式をDとすると

$D\geqq 0$ より

$(z-2)^2-4(z^2-2z)\geqq 0$

$-3z^2+4z+4\geqq 0$

$3z^2-4z-4\leqq 0$ $\qquad \frac{1}{3}\times\frac{-2}{2}$

$(z-2)(3z+2)\leqq 0$

$\therefore -\frac{2}{3}\leqq z\leqq 2$ //

(2) $xyz=z^2(z-2)$ //

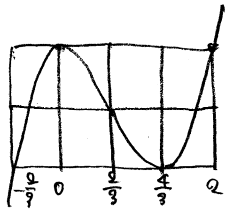
(3) $f(z)=z^2(z-2)$ $\left(-\frac{2}{3}\leqq z\leqq 2\right)$ とおく

$=z^3-2z^2$

$f'(z)=3z^2-4z$

$=z(3z-4)$

$f'(z)=0$ とすると $z=0, \frac{4}{3}$



$z=-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ のとき最小 最小値 $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=-\frac{32}{27}$ //