

3.5 体積(3)

(1) 空間図形の回転体

例1

座標空間に2点 $A(0, -1, 1)$ と $B(-1, 0, 0)$ をとる。線分 AB を z 軸の周りに1回転してできる面と2つの平面 $z=0, z=1$ とで囲まれた部分の体積を求めよ。

解説

t を $0 \leq t \leq 1$ である実数とする

線分 AB 上の点を P とすると,

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = (t-1, -t, t)$$

線分 AB を z 軸の周りに1回転してできる面を

平面 $z=t$ で切ったときの断面は,

中心が $(0, 0, t)$, 半径が $\sqrt{(t-1)^2 + (-t)^2}$ の円であるから
断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi\{(t-1)^2 + t^2\}$$

よって, 求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 \{(t-1)^2 + t^2\} dt = \pi \left[\frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

別解

線分 AB 上の点を $P(x, y, z)$ とすると,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{BA}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} x = -k \\ y = k-1 \\ z = -k+1 \end{cases} \quad (k \text{ は実数})$$

線分 AB を z 軸の周りに1回転してできる面を

平面 $z=t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切ると

$$-k+1=t \quad \therefore k=1-t$$

$$\therefore x=t-1, y=-t$$

断面は, 中心が $(0, 0, t)$, 半径が $\sqrt{(t-1)^2 + (-t)^2}$ の円より,
あとは同様

例2

座標空間において、原点 $O(0, 0, 0)$ 、点 $P(1, 0, 1)$ 、点 $Q(2, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OPQ を考える． $0 \leq t \leq 1$ のとき、点 $(0, t, 0)$ を通り xz 平面に平行な平面 H と辺 PQ が交わる点の座標は

$\left(\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix} + t, t, \begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix} - t \right)$ であり、平面 H と辺 OQ が交わる点の座標は $\left(\begin{matrix} \text{ウ} \\ \square \end{matrix} t, t, 0 \right)$ である．三角形 OPQ を y 軸の周りに回転したときの回転体の体積は $\begin{matrix} \text{エ} \\ \square \end{matrix} \pi$ である．

(解説)

$t \neq 0, t \neq 1$ のとき、辺 PQ と平面 H が交わる点 A は、
辺 PQ を $t : (1-t)$ に内分する点より

$$\overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OQ} + (1-t)\overrightarrow{OP}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} = (1+t, t, 1-t) \quad \therefore (1+t, t, 1-t)$$

これは $t=0, t=1$ のときも満たす

$t \neq 0, t \neq 1$ のとき、辺 OQ と平面 H が交わる点 B は、
辺 OQ を $t : (1-t)$ に内分する点より

$$\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OQ}$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} = (2t, t, 0) \quad \therefore (2t, t, 0)$$

これは $t=0, t=1$ のときも満たす

平面 H による切り口の面積 $S(t)$ は、

OA を半径とする円から、 OB を半径とする円を除いたものであるから

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi\{(1+t)^2 + (1-t)^2 - (2t)^2\} \\ &= \pi(-2t^2 + 2) \end{aligned}$$

よって、求める体積 V は

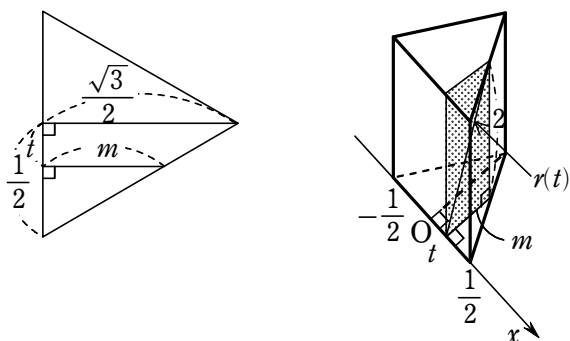
$$V = \pi \int_0^1 (-2t^2 + 2) dt = \pi \left[-\frac{2}{3}t^3 + 2t \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

例3

1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とする高さが 2 の正三角柱を考える．この正三角柱を底面の 1 辺を軸として 1 回転させる．このときできる回転体の体積を求めよ．

解説

図のように， x 軸および原点 O をとる



正三角柱を x 軸の周りに回転させてできる回転体を

平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq \frac{1}{2}$) で切ったときの断面の半径を $r(t)$ とすると

左図において，

$$\left(\frac{1}{2} - t\right) : \frac{1}{2} = m : \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore m = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - t\right)$$

右図において，三平方の定理より

$$\{r(t)\}^2 = m^2 + 2^2 = 3 \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 + 4 = 3t^2 - 3t + \frac{19}{4}$$

よって，断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \{r(t)\}^2 = \pi \left(3t^2 - 3t + \frac{19}{4}\right)$$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} S(t) dt = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(3t^2 - 3t + \frac{19}{4}\right) dt \\ &= 2\pi \left[t^3 - \frac{3}{2} t^2 + \frac{19}{4} t \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{17}{4} \pi \end{aligned}$$

例4

xyz 空間において、点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を ℓ とし、 ℓ を z 軸の周りに 1 回転してできる図形を A とする。 A を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解説

図形 A を表す方程式は

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 1 \leq z \leq 2$$

図形 A を平面 $x=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ることができる

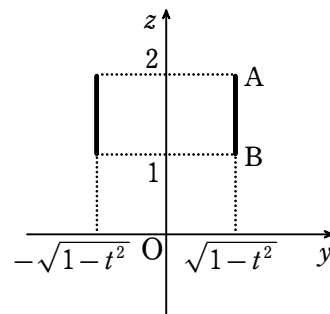
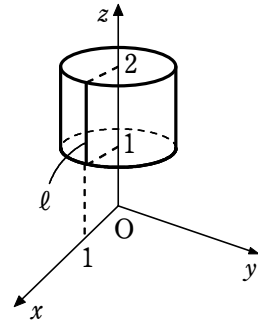
切断面は右下の図の実線部分のようになる

この切断面を x 軸の周りに 1 回転したとき、通過する領域の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \pi OA^2 - \pi OB^2 \\ &= \pi[(1-t^2) + 4] - \pi[(1-t^2) + 1] \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

よって、求める立体の体積 V は

$$V = \int_{-1}^1 3\pi dt = 6\pi \int_0^1 dt = 6\pi [t]_0^1 = 6\pi$$



注 円柱ではなく、円筒を回転していることに注意。

例5

xyz 空間の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(6, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 3, 3)$ を頂点とする三角錐 $OABC$ を考える。 $0 < a < 3$ のとき、平面 $y=a$ による三角錐 $OABC$ の断面の面積は $\boxed{}$ である。また、三角錐 $OABC$ を y 軸の周りに回転してできる回転体 V の体積は $\boxed{}$ である。

解説

$$Q\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, t\right)$$

(2) $AB=AC=AD=BC=BD=CD=2$ より、四面体 $ABCD$ は正四面体である

辺 BC , BD , AD と平面 $z=t$ との交点をそれぞれ R , S , T とすると、3 点の座標は

$$\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, t\right), \left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}}, t\right),$$

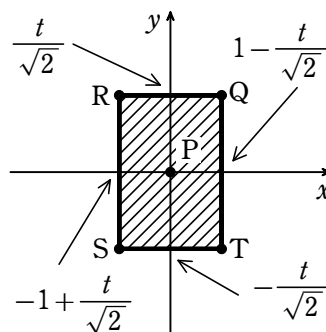
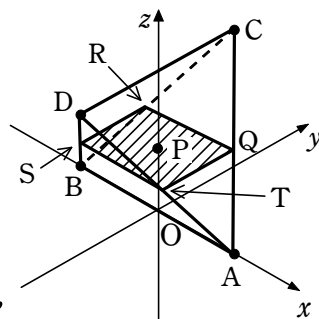
$$\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}}, t\right)$$

平面 $z=t$ による四面体 $ABCD$ の切り口は、四角形 $QRST$ であり、四面体 $ABCD$ を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体を平面 $z=t$ で切った切り口の面積 $S(t)$ は、

$$S(t)=\pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\pi(t^2-\sqrt{2}t+1)$$

求める立体の体積 V は

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi(t^2-\sqrt{2}t+1)dt=\pi\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$



例7

xyz 空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸の周りに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解説

円錐 V の側面上の点を $P(x, y, z)$ ($0 \leq x \leq 1$, $|y| \leq 1$) とする

円錐 V 上の点 P と点 $(x, 0, 0)$ の距離は x であるから

$$(x-x)^2+y^2+z^2=x^2$$

$$z^2=x^2-y^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

円錐 V の平面 $y=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) による切り口の図形は、

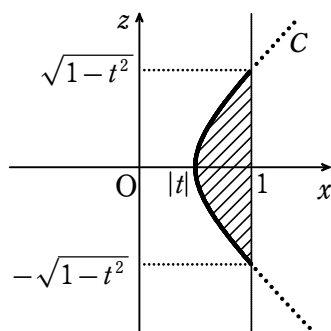
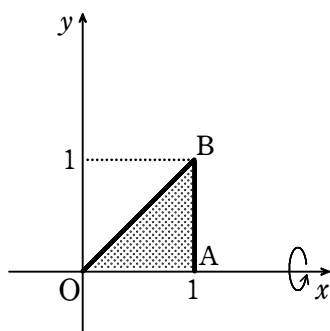
曲線 $C: z^2=x^2-t^2$ と直線 $x=1$ で囲まれた図形である

点 $(0, t, 0)$ と、この図形内の点との距離の最大値は

$$\sqrt{1^2+(\sqrt{1-t^2})^2}=\sqrt{2-t^2}$$

最小値は

$$|t|$$



よって、円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転
 させてできる立体の平面 $y=t$ による切り口
 の図形は右図のようになる

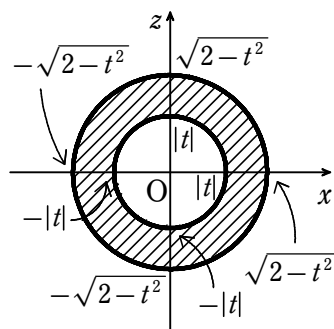
断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \{ (\sqrt{2-t^2})^2 - |t|^2 \} = 2(1-t^2)\pi$$

よって、求める体積は

$$\int_{-1}^1 2(1-t^2)\pi dt = -2\pi \int_{-1}^1 (t+1)(t-1) dt$$

$$= -2\pi \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \{1 - (-1)\}^3 = \frac{8}{3}\pi$$



補1

xyz 空間において, 2 点 $P(1, 0, 1)$, $Q(-1, 1, 0)$ を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転して得られる曲面を S とする。

(1) 曲面 S と, 2 つの平面 $x=1$ および $x=-1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

(2) (1) の立体の平面 $y=0$ による切り口を, 平面 $y=0$ 上において図示せよ。

(3) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{t^2+1} dt$ の値を $t = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$ と置換することによって求めよ。これを用いて, (2) の切り口の面積を求めよ。

解説

(1) 線分 PQ と平面 $x=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) との交点を $R(t, y, z)$ とし, 点 R から x 軸に下ろした垂線の足を $H(t, 0, 0)$ とする

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

$$(t, y, z) = (1-2k, k, 1-k)$$

$$t = 1-2k \text{ より, } k = \frac{1-t}{2}$$

$$\text{このとき, } y = \frac{1-t}{2}, \quad z = \frac{1+t}{2}$$

曲面 S の平面 $x=t$ による切り口は半径 RH の円より, 断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \left\{ \left(\frac{1-t}{2} \right)^2 + \left(\frac{1+t}{2} \right)^2 \right\} = \frac{\pi}{2} (1+t^2)$$

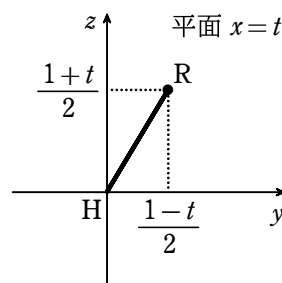
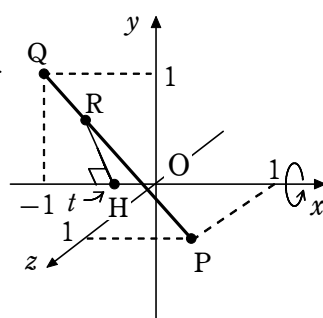
よって, 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} (1+t^2) dt = \pi \int_0^1 (1+t^2) dt \\ &= \pi \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

(2) (1) より, 曲面 S の平面 $x=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) による切り口の方程式は

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{2} (1+t^2)$$

$$y=0 \text{ のとき, } z^2 = \frac{1}{2} (1+t^2)$$



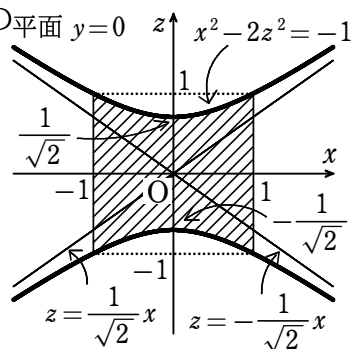
よって、(1)の立体の平面 $y=0$ による切り口の平面 $y=0$ 方程式は

$$z^2 = \frac{1}{2}(1+x^2) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$x^2 - 2z^2 = -1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

したがって、切り口は右図の斜線部

ただし、境界線を含む。



(3) $t = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$ とすると、 $\frac{dt}{ds} = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$

$\log(1 + \sqrt{2}) = \alpha$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} dt &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{e^s - e^{-s}}{2}\right)^2 + 1} \cdot \frac{e^s + e^{-s}}{2} ds \\ &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{e^s + e^{-s}}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^s + e^{-s}}{2} ds = \int_0^\alpha \left(\frac{e^s + e^{-s}}{2}\right)^2 ds \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\alpha (e^{2s} + 2 + e^{-2s}) ds = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2s} + 2s - \frac{1}{2} e^{-2s} \right]_0^\alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$z^2 = \frac{1}{2}(1+x^2) \text{ より, } z = \pm \sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$$

(2)の切り口は、 x 軸、 z 軸に関して対称であるから、その面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2+1}{2}} dx = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx \\ &= 2\sqrt{2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \right\} = 2 + \sqrt{2} \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

補2

xyz 空間に 3 点 $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, 1, 0)$, $R(-1, 1, 2)$ をとる。

(1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき, 平面 $z=t$ と $\triangle PQR$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2) $\triangle PQR$ を z 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

解説

(1) 平面 $z=t$ ($0 < t < 2$) と線分 RP , RQ との交点をそれぞれ A , B とする

$\triangle PQR$ は直角二等辺三角形であり,

$BA=RB=2-t$ より

$$A(1-t, 1, t), B(-1, 1, t)$$

(2) 平面 $z=t$ による回転体の切り口の面積を $S(t)$ とする

切り口は, 線分 AB を z 軸の周りに 1 回転したものであるから

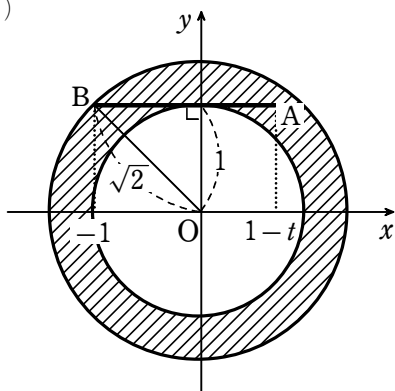
(i) $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$S(t) = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi$$

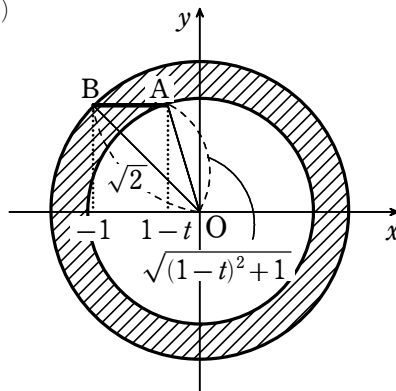
(ii) $1 \leq t \leq 2$ のとき

$$S(t) = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \pi \cdot (\sqrt{(1-t)^2 + 1})^2 = (-t^2 + 2t)\pi$$

(i)



(ii)



求める体積 V は

$$V = \int_0^2 S(t) dt = \pi \int_0^1 dt + \pi \int_1^2 (-t^2 + 2t) dt = \pi \left[t \right]_0^1 + \pi \left[-\frac{t^3}{3} + t^2 \right]_1^2 = \frac{5}{3}\pi$$