

高3数学 標準問題演習 11. 漸化式

1 [関西大]

数列 $\{a_n\}$ が条件 $a_1=3, a_{n+1}=(n+2)a_n+n!$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定められている。

(1) $b_n = \frac{a_n}{(n+1)!}$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2 [2010 同志社大]

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1, a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ ($n \geq 2$) を満たしている。

$\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は $b_1=1, b_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}b_{n-1}$ ($n \geq 2$) を満たしている。

$\{b_n\}$ の一般項を n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{c_n\}$ は $c_1=1, c_n = \frac{n^3-1}{n^3+1}c_{n-1}$ ($n \geq 2$) を満たしている。

$\{c_n\}$ の一般項を n を用いて表せ。

(4) 上の (3) の数列 $\{c_n\}$ に対し、 $S_n = \sum_{k=1}^n c_k$ を n を用いて表せ。

3 [2008 同志社大]

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3, a_{n+1}=2a_n+1$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

(2) $b_1=2, b_{n+1}=2b_n+n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

(3) $c_1=2, c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}n(n-1)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

高3数学 標準問題演習 11. 漸化式

4 [2020 広島大]

数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i), (ii) により定める。

- (i) $a_1 = 1$ である。
- (ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, n が奇数ならば $a_{n+1} = -a_n + 1$, また n が偶数ならば $a_{n+1} = -2a_n + 3$ である。

更に, 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n-1}$ により定め, 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ により定める。

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。
- (2) 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。
- (3) 自然数 m に対して, 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $(2m-1)$ 項までの和を T_m とする。 T_m を m を用いて表せ。

5 [関西医科大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n \geq 1$) で定義されている。

- (1) a_{10}, a_{16} を求めよ。
- (2) $a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ を満たす実数 p, q を求めよ。
- (3) 一般項 a_n を求めよ。
- (4) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

6 [2007 三重大]

$\{a_n\}, \{b_n\}$ を次のように定められた正の数の数列とする。

$$a_1 = 4, b_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 b_n, b_{n+1} = a_n b_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) α_n, β_n を $\alpha_n = \log_2 a_n, \beta_n = \log_2 b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定めるとき, $\alpha_n + \beta_n$ を n の式で表せ。
- (2) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (3) $\log_2(a_1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n)$ を求めよ。

高3数学 標準問題演習 11. 漸化式

7 [2010 三重大]

- (1) p, q, r, s を整数とする。このとき、 $p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$ が成り立つならば、 $p=r$ かつ $q=s$ となることを示せ。ここで $\sqrt{2}$ が無理数であることは使ってよい。
- (2) 自然数 n に対し、 $(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ を満たす整数 a_n, b_n が存在することを数学的帰納法により示せ。
- (3) a_n, b_n を (2) のものとする。このとき、すべての自然数 n について $(x, y)=(a_n, b_n)$ は方程式 $x^2-2y^2=1$ の解であることを数学的帰納法により示せ。

8 [2009 横浜国立大]

赤, 青, 黄の 3 色を用いて, 横 1 列に並んだ n 個のマス, 隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける。ただし, 使わない色があってもよい。両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし, 両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする。

- (1) a_3, b_3, a_4, b_4 を求めよ。 (2) a_n, b_n ($n \geq 3$) を n の式で表せ。