高3理系数学　発展問題演習　演習　11. 体積(2)

$\boxed{1}$ [東京大]

正四角錐 V に対し，その底面上に中心をもち，そのすべての辺と接する球がある．底面の 1 辺の長さを a とするとき，次の量を求めよ．

(1) V の高さ

(2) 球と四角すい V との共通部分の体積

　ただし，正四角錐とは，正方形を底面とし，その各辺を底辺とする 4 つの合同な二等辺三角形と底面とで囲まれる図形とする．

$\boxed{2}$ [2002 岐阜大]

関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{4}{4-t^2}dt$ $(-2<x<2)$ の逆関数を $g(x)$ とする．

(1)　$f(a)=2$ となる定数 a $(-2<a<2)$ を求めよ．

(2)　関数 $g(x)$ とその導関数 $g'(x)$ を求めよ．また，$\{g(x)\}^2=4-4g'(x)$ が成り立つことを示せ．

(3)　関数 $y=g(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x=2$ とで囲まれる図形を D とする．図形 D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{3}$ [2001 富山医科薬科大]

xy 平面上の領域 A を，$\mathrm{A}=\{(x,\ y)\mid x\geqq 0$　かつ　$y\geqq 0$　かつ　$x^2+y^2\leqq 1\}$ とする．A に含まれ，かつ，円 $x^2+y^2=1$ および y 軸に接する半径 r の円を $C(r)$ とする．

(1)　円 $C(r)$ の中心の座標を r を用いて表せ．また，r の最大値を求めよ．

(2)　円 $C(r)$ を x 軸の周りに 1 回転させてできる，回転体の体積 $V(r)$ を求めよ．

(3)　$V(r)$ を最大にするような r と，そのときの $V(r)$ の値を求めよ．

$\boxed{4}$ [神戸大]

$0\leqq t\leqq 1$ をみたす実数 t に対して，直線 $y=t$ と曲線 $y=(x+1)^2(x-1)^2$ によって囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とおく．$V(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ．

$\boxed{5}$ [2018 東北大]

xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y=-x$ の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1)　S を xy 平面に図示せよ。

(2)　V を求めよ。

(3)　3 つ目の不等式がない場合の V を求めよ。

$\boxed{6}$ [東京理科大]

直線 $l:y=mx$ と曲線 $C_m:y=mx+\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ について，次の問いに答えよ．ただし，m は自然数とする．

(1) 曲線 C_m 上の点 $\mathrm{P}(t, mt+\sin t)$ を通り直線 l_m に垂直な直線が，l_m と交わる点を H とする．

(i) PH の長さを求めよ．

(ii) OH の長さを求めよ．ただし，O は原点とする．

(2) 直線 l_m と曲線 C_m で囲まれる図形を，直線 l_m のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_m を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m^2(V_m-V_{m+1})$ を求めよ．

$\boxed{7}$ [2014 東京工業大]

点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

(1)　点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ。

(2)　直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点をもつような定数 a の値を求めよ。

(3)　図形 D を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

高3理系数学　発展問題演習　演習　11. 体積(2)

$\boxed{8}$ [2011 大阪大]

実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を考える。θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{9}$ [2000 東京工業大]

(1)　$m \geqq 0$，$n \geqq 1$ である整数 m，n に対し

$$a_{m,\ n} = \int_0^{\pi} \theta^m \cos n\theta\, d\theta,\quad b_{m,\ n} = \int_0^{\pi} \theta^m \sin n\theta\, d\theta$$

とおくとき，次の式を示せ．

$$a_{m+1,\ n} = -\frac{m+1}{n} b_{m,\ n},\quad b_{m+1,\ n} = (-1)^{n+1}\frac{\pi^{m+1}}{n} + \frac{m+1}{n} a_{m,\ n}$$

(2)　半径 1 の球面上の定点を端点とする長さ π のひもを考える．このひもが球の外側の空間を動くとき，ひもの通過しうる領域の体積を求めよ．

$\boxed{10}$ [2012 慶応義塾大]

(1)　$0 \leqq \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $R > 0$ とする。極座標 $(r,\ \theta)$ に関する条件 $0 \leqq r \leqq R$，$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ により定まる図形を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積を T とする。T を α，β，R を用いた式で表すと $T = {}^{ア}\boxed{}$ である。

(2)　極方程式 $r = f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \alpha)$ で表される曲線 C と，$\theta = \alpha$ で表される直線 ℓ および x 軸の正の部分で囲まれた図形を S とする。ただし $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とし，関数 $f(\theta)$ は連続かつ $f(\theta) > 0$ を満たし，$0 \leqq \theta \leqq \alpha$ において増加または減少または定数とする。
S を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積を $V(\alpha)$ とすると
$\dfrac{d}{d\alpha}V(\alpha) = {}^{イ}\boxed{}$ であり，したがって $V(\alpha) = {}^{ウ}\boxed{}$ である。また S を直線 ℓ の周りに回転させて得られる立体の体積を $W(\alpha)$ とすると $W(\alpha) = {}^{エ}\boxed{}$ である。

(3)　(2) において $f(\theta) = \sqrt[3]{\cos\theta}$ とするとき $V\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$W\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値を求めると

$V\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = {}^{オ}\boxed{}$，$W\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = {}^{カ}\boxed{}$ である。