

3.3 関数のグラフ

(1) 曲線の凹凸

曲線 C について、ある区間において、
その区間にある C 上の任意の 2 点 P, Q に対して、
弧 PQ が線分 PQ の下側にあるとき、曲線 C はその区間で下に凸であるといい、
弧 PQ が線分 PQ の上側にあるとき、曲線 C はその区間で上に凸であるという。

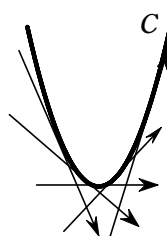
関数 $f(x)$ が微分可能であるとき、曲線 $y=f(x)$ 上の各点で接線を引くことができる。その接線の傾きの変化を、導関数 $f'(x)$ の増減によって調べる。

関数 $f(x)=x^2$ では、 $f'(x)=2x$ であるから、 x の値が増加するにつれて、 $f'(x)$ の値も増加する。よって、この関数のグラフ上の各点に接線の傾きは増加する。

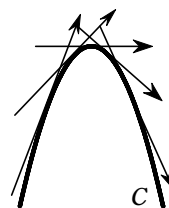
これに対し、関数 $f(x)=-x^2$ では、 $f'(x)=-2x$ であるから、 x の値が増加するにつれて、 $f'(x)$ の値は減少する。よって、この関数のグラフ上の各点に接線の傾きは減少する。

微分可能な関数 $y=f(x)$ のグラフを曲線 C とする。

ある区間で x の値が増加するにつれて、
接線の傾きが増加するとき、
曲線 C はその区間で下に凸であり、
接線の傾きが減少するとき、
曲線 C はその区間で上に凸である。



下に凸



上に凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき、 $f'(x)$ の値の増減は $f''(x)$ の値の符号によって分かる。

ここで、 $f'(x)$ は曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きを表すから、
曲線 $y=f(x)$ の凹凸について、次のことが成り立つ。

曲線の凹凸

関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする

$f''(x) > 0$ である区間では、曲線 $y = f(x)$ は下に凸であり、

$f''(x) < 0$ である区間では、曲線 $y = f(x)$ は上に凸である

これまでの議論を定式化してしっかり証明するのが次の問題である。

例1

関数 $y = f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の値が常に正とする。このとき、実数 $a, b, t (a < b, 0 \leq t \leq 1)$ について、不等式

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのは、どのような場合か。

(解説)

$0 < t < 1$ のとき、平均値の定理より

$$\frac{f((1-t)a + tb) - f(a)}{t(b-a)} = f'(c_1) \quad (a < c_1 < (1-t)a + tb) \cdots \textcircled{1}$$

を満たす c_1 と、

$$\frac{f(b) - f((1-t)a + tb)}{(1-t)(b-a)} = f'(c_2) \quad ((1-t)a + tb < c_2 < b) \cdots \textcircled{2}$$

を満たす c_2 が存在する

$f''(x) > 0$ より、 $f'(x)$ は単調に増加するから

$$f'(c_1) < f'(c_2)$$

①, ②より

$$\frac{f((1-t)a + tb) - f(a)}{t(b-a)} < \frac{f(b) - f((1-t)a + tb)}{(1-t)(b-a)}$$

$$\therefore f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$$

$t=0, t=1$ のとき、等号が成り立つ

よって、与えられた不等式は成り立つ

(2) 変曲点

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ を境目として、曲線の凹凸の状態が変わるとき、点 P を曲線 $y = f(x)$ の変曲点という。

曲線 $y = f(x)$ は、 $f''(x) > 0$ となる範囲では下に凸、 $f''(x) < 0$ となる範囲では上に凸であるから、点 $(a, f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点ならば、 $f''(a) = 0$ である。

しかし、 $f''(a)=0$ であっても、 $P(a, f(a))$ が曲線の変曲点であるとは限らない。

例えば、 $f(x)=x^4$ では、 $f''(x)=12x^2$ より $f''(0)=0$ であるが、 $x=0$ の前後で $f''(x)>0$ であるので、曲線 $y=f(x)$ の凹凸は変わらない。よって、原点 O は変曲点ではない。

変曲点についてまとめると、次のようになる。

変曲点

関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする

1. $f''(a)=0$ のとき、 $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば、点 $(a, f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である
2. 点 $(a, f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば、 $f''(a)=0$

例2

3 次関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ が $x=a$ で極大となるとき、 a の値と極大値、および変曲点を求めよ。

解説

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f''(x)=6x-12$$

$$f'(x)=0 \text{ となるのは、 } x=1, 3$$

$$f''(x)=0 \text{ となるのは、 } x=2$$

x	...	1	...	2	...	3	...
$f'(x)$	+	0		-		0	+
$f''(x)$		-		0		+	
$f(x)$	↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗

$x=1$ のとき極大となるから、 $a=1$

$$\text{極大値 } f(1)=5$$

変曲点は $(2, 3)$

注 増減と凹凸を同時に表した表を増減凹凸表という。

例3

4 次関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ は $x = -3$ で極値をとり、そのグラフは点 $(-1, -11)$ を変曲点とする。このとき $a = \text{ア}$, $b = \text{イ}$, $c = \text{ウ}$ である。

解説

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$$

$x = -3$ で極値をとるから、 $f'(-3) = 0$ であることが必要

$$4(-3)^3 + 3a(-3)^2 + 2b(-3) + c = 0$$

$$27a - 6b + c = 108 \dots \text{①}$$

点 $(-1, -11)$ が変曲点であるから、 $f''(-1) = 0$, $f(-1) = -11$ であることが必要

$$12 - 6a + 2b = 0 \quad \therefore 3a - b = 6 \dots \text{②}$$

$$1 - a + b - c = -11 \quad \therefore a - b + c = 12 \dots \text{③}$$

①, ②, ③より、 $a = 6$, $b = 12$, $c = 18$

このとき

$$f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 24x + 18 = 2(x+3)(2x^2 + 3x + 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 + 36x + 24 = 12(x+1)(x+2)$$

x	...	-3	...	-2	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗		↗	変曲点 -11	↗

$x = -3$ で極小値をとり、点 $(-1, -11)$ を変曲点とするから

$$a = \text{ア}6, b = \text{イ}12, c = \text{ウ}18$$

(3) 関数のグラフの概形

関数 $y = f(x)$ のグラフをかくには、関数の増減、極値、凹凸、変曲点などを調べるとよい。

例4

関数 $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて増減表を作成せよ。
- (4) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求めよ。
- (5) 関数 $f(x)$ のグラフをかけ。

解説

$$(1) f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2} = \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} (2) f''(x) &= -\frac{8x(x^2+1)^2 - (4x^2-4) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= -\frac{8x(x^2+1)^2 - 16x(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= -\frac{8x(x^2+1)\{(x^2+1) - 2(x^2-1)\}}{(x^2+1)^4} = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$(3) f'(x) = 0 \text{ となるのは, } x = \pm 1$$

$f(x)$ は

$x \leq -1$, $1 \leq x$ で単調に減少し, $-1 \leq x \leq 1$ で単調に増加するから
 $x = -1$ で極小値 -2 , $x = 1$ で極大値 2 をとる。

$$f''(x) = 0 \text{ となるのは, } x = 0, \pm\sqrt{3}$$

$f(x)$ は

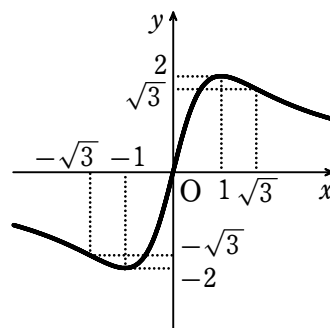
$x < -\sqrt{3}$, $0 < x < \sqrt{3}$ で上に凸, $-\sqrt{3} < x < 0$, $\sqrt{3} < x$ で下に凸
 変曲点は点 $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

増減(凹凸)表は下図(本問では凹凸は不要)

x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$



(5) $f(x)$ のグラフは右図

㊦ 分数関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ が $x=\alpha$ で極値をとるとき、 $g'(\alpha) \neq 0$ であれば、

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

が成り立つ。本問の場合、 $x=1$ で極大値で、極大値は $\frac{4}{2 \cdot 1} = 2$ とより簡単に計算することができる。本問程度であれば、わざわざこの公式を利用しなくても簡単に計算できるが、分母・分子がより複雑な形のときは意外と役に立つこともある。簡単に証明しておくと、

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = 0 \text{ となるのは,}$$

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$$

この解が $x=\alpha$ であるから、

$$f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha) = 0 \quad \therefore \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

となる。

例5

関数 $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{x-1}\right) + 2$ の極大値は ア , 極小値は イ である。また曲線 $y=f(x)$ の漸近線の方程式は $x = \text{ウ}$ と $y = \text{エ}$ $x + \text{オ}$ である。

解説

$$f'(x) = 2 \left\{ 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right\} = 2 \cdot \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0$ となるとき, $x=0, 2$

$x=0$ で極大 極大値 $^{\circ}0$,

$x=2$ で極小 極小値 $^{\circ}8$

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	/	$\searrow$	8	$\nearrow$

$x \neq 0$ のとき, $\frac{f(x)}{x} = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{x(x-1)} \right\} + \frac{2}{x}$ より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

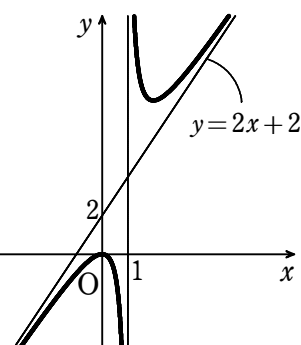
また, $f(x) - 2x = \frac{2}{x-1} + 2$ より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - 2x\} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - 2x\} = 2$$

直線 $y = 2x + 2$ は曲線 $y = f(x)$ の漸近線である

よって, 曲線 $y = f(x)$ の漸近線の方程式は

$$x = ^{\circ}1 \text{ と } y = ^{\circ}2x + ^{\circ}2$$



[注] 曲線上の点が限りなく遠ざかるにつれて, 曲線がある一定の直線に近づくとき, この直線を曲線の漸近線といった。いま, ある曲線が $y = ax + b$ の形の漸近線をもつとき,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$$

が成り立つ。 $y = ax + b$ の形の漸近線について次のことが成り立つ。

ある曲線の漸近線を $y = ax + b$ とするとき,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - ax\} = b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0 \text{ のとき, } \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\} = b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} - a \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \{f(x) - ax\} = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\} = b)$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$x \rightarrow -\infty$ のときも同様にして示せる。

例6

関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。
- (3) 自然対数の底 e と円周率 π について、 $f(e)$ と $f(\pi)$ の大小を比較せよ。
- (4) e^π と π^e の大小を比較せよ。

解説

$$(1) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

(2) $f'(x) = 0$ となるのは

$$1 - \log x = 0 \quad \therefore x = e$$

$x = e$ のとき極大 極大値 $\frac{1}{e}$

(3) (2) より、 $f(x)$ は $x \geq e$ で単調に減少し
 $e < \pi$ より

$$f(e) > f(\pi)$$

(4) (3) より、 $f(e) > f(\pi)$ より

$$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$$

$$\pi \log e > e \log \pi$$

$$\therefore \log e^\pi > \log \pi^e$$

底 $e > 1$ より、 $e^\pi > \pi^e$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

例7

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ で与えられる曲線 C について、次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ および $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として求めよ。
- (2) 曲線 C 上の点で y 座標が最大となる点の座標と、そのときの t の値を求めよ。
- (3) 曲線 C の概形をかけ。

解説

$$(1) \frac{dx}{dt} = 2\cos t, \frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$$

$$\text{よって, } 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ において, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos 2t}{2\cos t} = \frac{\cos 2t}{\cos t}$$

$$(2) \frac{dy}{dt} = 0 \text{ となるのは, } t = \frac{\pi}{4}$$

y は $t = \frac{\pi}{4}$ のとき極大かつ最大

このとき,

$$x = 2\sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad y = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	0	↗	1	↘	0

よって, 曲線 C 上の点で y 座標が最大となる点の座標は $(\sqrt{2}, 1)$

そのときの t の値は $t = \frac{\pi}{4}$

$$(3) 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ において常に } \frac{dx}{dt} \geq 0 \text{ より}$$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において, x は単調に増加する。

また, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において

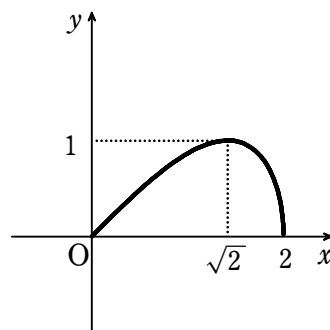
$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos 2t}{\cos t} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{-2\sin 2t \cdot \cos t - \cos 2t \cdot (-\sin t)}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{2\cos t} \\ &= \frac{-4\sin t \cos^2 t + \sin t(2\cos^2 t - 1)}{2\cos^3 t} \\ &= -\frac{\sin t(2\cos^2 t + 1)}{2\cos^3 t} < 0 \end{aligned}$$

よって, 曲線 C は上に凸である

$t = 0$ のとき, $x = 0, y = 0$

$t = \frac{\pi}{2}$ のとき, $x = 2, y = 0$

したがって, 曲線 C の概形は右図



例8

(1) 関数 $r = 1 - \sin \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) を極方程式とする座標平面上 (x, y 座標) の曲線を考える。偏角 θ をもつ点における接線の傾き $u(\theta) = \frac{dy}{dx}$ は、 θ を用いて表すと

$$u(\theta) = \boxed{} \text{ となり, } \lim_{\theta \rightarrow +0} u(\theta) = \boxed{}, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} u(\theta) = \boxed{}$$

である。

(2) (1) の曲線において、 y 座標が最大となる点を求め、曲線の概形を図示せよ。

解説

$$(1) x = r \cos \theta = (1 - \sin \theta) \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = (1 - \sin \theta) \sin \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\cos \theta \cdot \cos \theta + (1 - \sin \theta) \cdot (-\sin \theta) = -\sin \theta - \cos 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\cos \theta \cdot \sin \theta + (1 - \sin \theta) \cdot \cos \theta = \cos \theta - \sin 2\theta$$

$$u(\theta) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin 2\theta - \cos \theta}{\cos 2\theta + \sin \theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} u(\theta) = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

ここで

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \frac{\cos \theta (1 - 2\sin \theta)}{2\sin^2 \theta - \sin \theta - 1} = \frac{\cos \theta (1 - 2\sin \theta)}{(\sin \theta - 1)(2\sin \theta + 1)} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{(2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1)}{2\sin \theta + 1} \end{aligned}$$

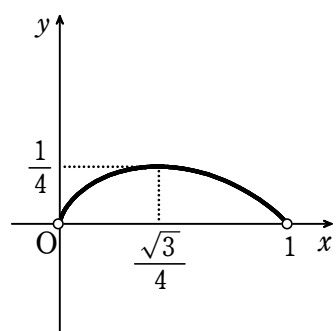
$$\text{より, } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} u(\theta) = \infty$$

(2)

θ	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{\pi}{6}$	...	0
x	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	...	1
$\frac{dy}{dx}$	∞	+	0	-	-1
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

曲線の概形は右図

y 座標が最大となる点は、 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$



補1

(1) a, b を異なる実数とし、関数 $f(x)$ が a, b を含む区間で第2次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x) < 0$ が成り立つものとする。このとき $0 \leq t \leq 1$ に対して、

$$tf(a) + (1-t)f(b) \leq f(ta + (1-t)b)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $f(x) = \log x$ に (1) の結果を適用することにより、正の数 a, b, c に対して、

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\log x$ は自然対数とする。

解説

(1) $a \neq b$ であるから、 $a < b$ として考えればよい

$t=0, 1$ のとき、明らかに等号が成り立つ

$0 < t < 1$ のとき、

$ta + (1-t)b > ta + (1-t)a = a$, $ta + (1-t)b < tb + (1-t)b = b$ より

$$a < ta + (1-t)b < b$$

$y=f(x)$ について、区間 $[a, ta + (1-t)b]$, $[ta + (1-t)b, b]$ において、平均値の定理より

$$\frac{f(ta + (1-t)b) - f(a)}{ta + (1-t)b - a} = f'(c_1) \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{f(b) - f(ta + (1-t)b)}{b - \{ta + (1-t)b\}} = f'(c_2) \cdots \textcircled{2}$$

となる、 c_1, c_2 (ただし $a < c_1 < ta + (1-t)b < c_2 < b$) が存在する

$f''(x) < 0$ であるから、 $f'(x)$ は単調減少より

$$f'(c_1) > f'(c_2)$$

①, ②より

$$\frac{f(ta + (1-t)b) - f(a)}{(1-t)(b-a)} > \frac{f(b) - f(ta + (1-t)b)}{t(b-a)}$$

両辺 $t(1-t)(b-a) > 0$ をかけて

$$t\{f(ta + (1-t)b) - f(a)\} > (1-t)\{f(b) - f(ta + (1-t)b)\}$$

$$f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b)$$

以上より、 $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$tf(a) + (1-t)f(b) \leq f(ta + (1-t)b)$$

(2) $f(x) = \log x$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

(1)より

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{abc} &= \frac{1}{3}(\log a + \log b + \log c) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2}(\log a + \log b) \right\} + \frac{1}{3} \log c \\ &\leq \frac{2}{3} \log \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \right) + \frac{1}{3} \log c \\ &\leq \log \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \right) + \frac{1}{3}c \right\} \\ &= \log \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

底 $e > 1$ より

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

補2

$\log x$ を自然対数, n を自然数として, 次の各不等式を証明せよ。ただし, 等号成立条件には言及しなくてよい。

(1) $0 < a < b$, $a \leq x \leq b$ のとき,

$$\log x \geq \log a + \frac{x-a}{b-a}(\log b - \log a)$$

(2) $a_1, a_2 > 0$ とし, $p_1, p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ のとき,

$$\log(p_1 a_1 + p_2 a_2) \geq p_1 \log a_1 + p_2 \log a_2$$

(3) $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ とし, $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ のとき,

$$\log \sum_{i=1}^n p_i a_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \log a_i$$

(4) $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ のとき,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

解説

(1) $y = \log x$ とすると, $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$

$x > 0$ で常に $y'' < 0$ であるから, $y = \log x$ は上に凸

$0 < a < b$ である a, b に対し, $A(a, \log a)$, $B(b, \log b)$ とする

曲線 $y = \log x$ を C , 直線 $y = \frac{\log b - \log a}{b - a}(x - a) + \log a$ を L とする

曲線 C と直線 L はどちらも A, B を通り,

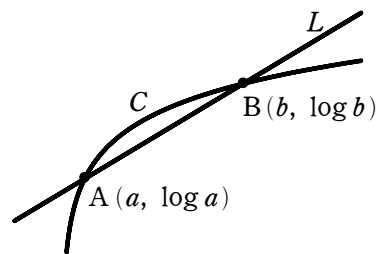
C は上に凸であるから,

$a \leq x \leq b$ において C は L の上側にある

よって, $a \leq x \leq b$ のとき

$$\log x \geq \frac{\log b - \log a}{b - a}(x - a) + \log a$$

よって, 成り立つ

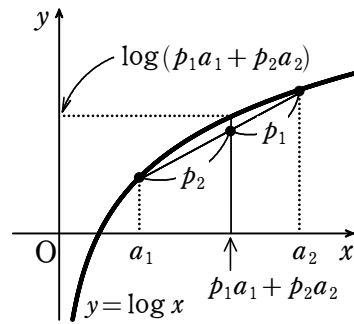


(2) 2点 $(a_1, \log a_1)$, $(a_2, \log a_2)$ を結ぶ
線分を $p_2 : p_1$ に内分する点の座標は

$$(p_1 a_1 + p_2 a_2, p_1 \log a_1 + p_2 \log a_2)$$

曲線 $y = \log x$ は上に凸であるから、
この点は曲線 $y = \log x$ の下側にある
よって、 $x = p_1 a_1 + p_2 a_2$ の y の値を考えて

$$\log(p_1 a_1 + p_2 a_2) \geq p_1 \log a_1 + p_2 \log a_2$$



(3) (i) $n=1$ のとき

$$\text{左辺} = \log p_1 a_1 = \log a_1, \quad \text{右辺} = p_1 \log a_1 = \log a_1$$

よって、 $n=1$ のとき成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき成り立つと仮定して

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1 \text{ のとき, } \log \sum_{i=1}^k p_i a_i \geq \sum_{i=1}^k p_i \log a_i$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$p_1 + p_2 + \dots + p_k + p_{k+1} = 1$ のとき、 $p_1 + p_2 + \dots + p_k = q$ とおくと、
 $q + p_{k+1} = 1$ であるから、(2)より

$$\log \sum_{i=1}^{k+1} p_i a_i = \log \left(q \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{q} a_i + p_{k+1} a_{k+1} \right) \geq q \log \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{q} a_i + p_{k+1} \log a_{k+1}$$

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_k}{q} \geq 0, \quad \frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q} + \dots + \frac{p_k}{q} = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} q \log \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{q} a_i + p_{k+1} \log a_{k+1} &\geq q \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{q} \log a_i + p_{k+1} \log a_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \log a_i + p_{k+1} \log a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} p_i \log a_i \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ のときも ① は成り立つ

(i), (ii) から、数学的帰納法より、

すべての自然数 n で成り立つ

(4) (3) の不等式において、 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ とすると

$$\begin{aligned} \log \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &\geq \frac{1}{n} (\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n) \\ &= \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \end{aligned}$$

$$\text{底 } e > 1 \text{ より, } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

補3

$f(x) = \log \frac{x+a}{b-x}$ とする. ただし, $a > 0, b > 0$ とする.

- (1) $y = f(x)$ の増減を調べよ.
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べよ.
- (3) 曲線 $y = f(x)$ は変曲点に関して点対称であることを示せ.
- (4) 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け.

解説

- (1) 真数条件は

$$\frac{x+a}{b-x} > 0$$

$$(x+a)(b-x) > 0$$

$$a > 0, b > 0 \text{ より, } -a < x < b$$

$$f(x) = \log(x+a) - \log(b-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{1}{b-x} = -\frac{a+b}{(x+a)(x-b)} > 0 \text{ より}$$

$f(x)$ は単調に増加する

$$(2) f''(x) = \frac{(a+b)(2x+a-b)}{(x+a)^2(x-b)^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ となるのは, } x = \frac{-a+b}{2}$$

$$-a < x \leq \frac{-a+b}{2} \text{ において上に凸,}$$

$$\frac{-a+b}{2} \leq x < b \text{ において下に凸}$$

$$(3) \text{ 変曲点は } \left(\frac{-a+b}{2}, 0 \right)$$

点 (x, y) の変曲点に関する対称点を (X, Y) とおくと

$$\frac{x+X}{2} = \frac{-a+b}{2}, \frac{y+Y}{2} = 0$$

$$x = -X - a + b, y = -Y$$

$y = f(x)$ に代入して

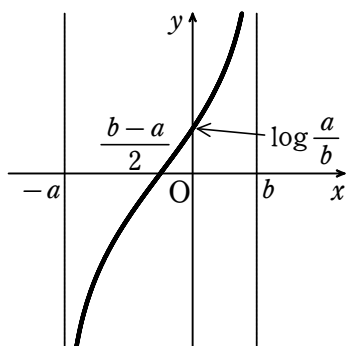
$$-Y = \log \frac{-X-a+b+a}{b+X+a-b} = \log \frac{b-X}{X+a}$$

$$\therefore Y = -\log \frac{b-X}{X+a} = \log \frac{X+a}{b-X}$$

よって、点 (X, Y) も曲線 $y=f(x)$ 上にあるので、
題意は示された

(4)

x	$-a$	$\dots$	$\frac{-a+b}{2}$	$\dots$	b
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	$+$	$+$	$\nearrow$
$f''(x)$	$\nearrow$	$-$	0	$+$	$\nearrow$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$



補4

方程式 $x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$ を考える。

(1) 上の方程式を y について解け。また、上の方程式を満たす x, y がどちらも実数であるような x の範囲を求めよ。

(2) (1) で得られた 2 つの関数のグラフを極大値、極小値を明記し、上に凸か下に凸かも考慮してかけ。ただし、 x の範囲は (1) で得られたものとする。

(解説)

$$(1) x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$$

$$4y^2 + 2(x+2)y + x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$\therefore y = \frac{-(x+2) \pm \sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}{4}$$

x と y がともに実数であるような x の値の範囲は

$$-3x^2 - 4x + 20 \geq 0$$

$$(3x+10)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -\frac{10}{3} \leq x \leq 2$$

$$(2) f(x) = \frac{-(x+2) + \sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}{4}$$

$$g(x) = \frac{-(x+2) - \sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}{4} \text{ とおく}$$

$$f'(x) = \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-6x-4}{\sqrt{-3x^2-4x+20}}}{4} = \frac{-\sqrt{-3x^2-4x+20} - (3x+2)}{4\sqrt{-3x^2-4x+20}}$$

$$g'(x) = \frac{-\sqrt{-3x^2-4x+20} + (3x+2)}{4\sqrt{-3x^2-4x+20}}$$

$f'(x) = 0$ となるのは

$$-\sqrt{-3x^2-4x+20} - (3x+2) = 0$$

$$-\sqrt{-3x^2-4x+20} = 3x+2$$

$$-3x^2-4x+20 = 9x^2+12x+4, 3x+2 \leq 0$$

$$(3x-2)(x+2) = 0, x \leq -\frac{2}{3} \quad \therefore x = -2$$

同様にして, $g'(x) = 0$ となるのは, $x = \frac{2}{3}$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{-3x^2-4x+20} - (3x+2)}{4\sqrt{-3x^2-4x+20}} = -\frac{1}{4} - \frac{3x+2}{4\sqrt{-3x^2-4x+20}}$$

$$f''(x) = -\frac{16}{(\sqrt{-3x^2-4x+20})^3}$$

$$g''(x) = \frac{16}{(\sqrt{-3x^2-4x+20})^3}$$

$-\frac{10}{3} \leq x \leq 2$ を満たすすべての x に対して, $f''(x) < 0, g''(x) > 0$

x	$-\frac{10}{3}$	...	-2	...	2
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$
$f''(x)$	$\nearrow$	$-$	$-$	$-$	$\searrow$
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

x	$-\frac{10}{3}$	...	$\frac{2}{3}$	...	2
$g'(x)$	$\nearrow$	$-$	0	$+$	$\searrow$
$g''(x)$	$\nearrow$	$+$	$+$	$+$	$\searrow$
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	-1

$f(x)$ は, $x = -2$ で極大値 1

$g(x)$ は, $x = \frac{2}{3}$ で極小値 $-\frac{5}{3}$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの概形は右図

