58 [日本大]

A 君は日記をなるべくつけるようにした．日記をつけた日の翌日は確率 $\frac{2}{3}$ で日記をつけ，日記をつけなかった日の翌日は確率 $\frac{5}{6}$ で日記をつけているという．初日に日記をつけたとして，第 n 日に日記をつける確率を p_n とする．

(1) $p_{n+1}=\boxed{}-\boxed{}p_n$ である．

(2) p_n を求めよ．

(1) n日目　$n+1$日目

$$\begin{tikzcd} \underset{p_n}{\bigcirc} \arrow[r, "\frac{2}{3}"] & \underset{p_{n+1}}{\bigcirc} \\ \underset{1-p_n}{\times} \arrow[ur, "\frac{5}{6}"'] & \end{tikzcd}$$

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{5}{6}(1-p_n)$$
$$=-\boxed{\frac{1}{6}}p_n+\boxed{\frac{5}{6}}$$

(2) $p_{n+1}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{5}{6}$，$p_1=1$

$\alpha=-\frac{1}{6}\alpha+\frac{5}{6}$
$\therefore \alpha=\frac{5}{7}$

$$p_{n+1}-\frac{5}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{5}{7}\right)$$

$\left\{p_n-\frac{5}{7}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$

公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列より

$$p_n-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$ //

60 [2019 学習院大]

さいころを n 回投げるとき，6の目が出た回数を X とし，X が偶数である確率を P_n とする。

(1)　P_1，P_2 を求めよ。

(2)　P_{n+1} を P_n を用いて表せ。

(3)　P_n を求めよ。

(1)

$$P_1=\frac{5}{6}，P_2=\underbrace{\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}}_{6が0回}+\underbrace{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}_{6が2回}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$$

(2) n回目　$n+1$回目

$$\begin{tikzcd} \underset{P_n}{X\text{が偶}} \arrow[r, "\frac{5}{6}"] & \underset{P_{n+1}}{X\text{が偶}} \\ \underset{1-P_n}{X\text{が奇}} \arrow[ur, "\frac{1}{6}"'] & \end{tikzcd}$$

$$P_{n+1}=\frac{5}{6}P_n+\frac{1}{6}(1-P_n)$$
$$\therefore P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{6}$$ //

(3) $P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{6}$

$\alpha=\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}\alpha=\frac{1}{6}$　$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

$$P_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(P_n-\frac{1}{2}\right)$$

$\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $P_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列より

$$P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$ //

59 [2001 中央大]

ある工場の製品の不良率は，機械の状態によって日ごとに変化して，2％と4％の2通りだけある．ある日の不良率が2％であったとき，次の日に不良率が2％となる確率が $\frac{1}{2}$，またある日の不良率が4％であったとき，次の日に不良率が4％となる確率が $\frac{1}{4}$ であるとする．今日の不良率が4％であったものとして，次の問いに答えよ．ただし，明日を1日後，明後日を2日後とする．また，n $(n\geqq1)$ 日後に不良率が2％となる確率を p_n とする．

(1)　p_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 7)$ を求めよ．

(2)　p_n を p_{n-1} で表せ．

(3)　p_n を求めよ．

61 [2015 中央大]

1個のさいころを繰り返し投げ，3の倍数の目が出る回数を数える。いま，さいころを n 回投げるとき，3の倍数の目が奇数回出る確率を P_n とする。

(1)　P_2 および P_3 を求めよ。　　(2)　P_{n+1} を P_n で表せ。

(3)　P_n を n の式で表せ。

62 [1997 神奈川大]

1つのさいころを n 回 $(n\geqq1)$ 投げたとき，1の目の出る回数が偶数回である確率を p_n，奇数回である確率を q_n とする．ただし，0回は偶数回と考える．

(1)　$p_{n+1},\ q_{n+1}$ を $p_n,\ q_n$ で表せ．

(2)　p_n-q_n を n で表せ．

(3)　$p_n,\ q_n$ を n で表せ．

63 [2019 日本女子大]

1から5までの数字が1つずつ書かれた5枚のカードが入っている袋からカードを1枚取り出し，数字を調べてからもとに戻す。この試行を繰り返し行うとき，n 回目までに出た n 個の数の合計を S_n とする。S_n が3で割り切れる確率を a_n とする。

(1)　a_1，a_2 を求めよ。　　(2)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3)　a_n を n の式で表せ。

(1) $a_1=\frac{1}{5}$

$a_2=\frac{9}{25}$ //

1 ＜ 2, 5

2 ＜ 1, 4

3 — 3

4 ＜ 2, 5

5 ＜ 1, 4

(2) n 回目

S_n が3で割り切れる $\xrightarrow{\frac{1}{5}}$ S_{n+1} が3で割り切れる

a_n　　　　a_{n+1}

S_n が3で割り切れない $\xrightarrow{\frac{2}{5}}$

$1-a_n$

$a_{n+1}=\frac{1}{5}a_n+\frac{2}{5}(1-a_n)$

$\therefore a_{n+1}=-\frac{1}{5}a_n+\frac{2}{5}$ //　　$\alpha=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5}$　$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$

(3) $a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}(a_n-\frac{1}{3})$

$\{a_n-\frac{1}{3}\}$ は初項 $a_1-\frac{1}{3}=-\frac{2}{15}$

公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列より

$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{2}{15}\cdot(-\frac{1}{5})^{n-1}$

$\therefore a_n=\frac{1}{3}-\frac{2}{15}\cdot(-\frac{1}{5})^{n-1}$ //

64 [2010 埼玉大]

各面に1から8までの数字が1つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ，n 回目までに出た数字の合計を $X(n)$ とする。$X(n)$ が3で割り切れる確率を a_n，$X(n)$ を3で割ったとき1余る確率を b_n，$X(n)$ を3で割ったとき2余る確率を c_n とする。ただし，1から8までの数字の出る確率はどれも同じとする。

(1)　a_1，b_1，c_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

(3)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。　　(4)　a_n，b_n，c_n を求めよ。

65 [1994 京都大]

さいころを n 回続けて投げるとき，k 回目に出る目の数を X_k とし，$Y_n=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ が7で割り切れる確率を p_n とする．

(1) p_n を p_{n-1} を用いて表せ．

(2) p_n を求めよ．

66 [2013 東北大]

袋の中に1，2，3，4，5の番号が1つずつ書かれた5つの玉が入っている。この中から無作為に1個の玉を取り出し，玉に書かれている数字を記録したのち袋に戻すという操作を行う。その操作を繰り返し，記録された数字の和が3の倍数になった時点で終了する。ただし，1回目で3の倍数が出た場合は，その時点で終了とする。n 回目の操作で終了する確率を p_n とする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，p_n を n の式で表せ。

67 [2012 千葉大]

さいころを n 回（$n\geqq 2$）投げ，k 回目（$1\leqq k\leqq n$）に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が18以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ が4の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を3で割ったときの余りが1である確率を求めよ。

(1) X_1X_2 が18以下 $=1-X_1X_2$ が18より大きい

4 ＜ 5, 6　5 ＜ 4, 5, 6　6 ＜ 4, 5, 6

$=1-\frac{8}{36}=\frac{7}{9}$ //

(2) $X_1X_2\cdots X_n$ が偶 $=1-X_1X_2\cdots X_n$ が奇

$=1-(\frac{1}{2})^n$ //

(3) $X_1X_2\cdots X_n$ が4の倍数とならないのは

i) 全部奇

ii) どれか1回が2, 6であとは奇より

$1-\{\underset{i)}{(\frac{1}{2})^n}+\frac{n}{3}(\frac{1}{2})^{n-1}\}$ //

(4) $X_1X_2\cdots X_n$ を3で割った余りが1である確率を p_n とする
　　　　　　　　　　　　　　　　　"　2　"　　　　q_n 。

n 回目　　　　$n+1$ 回目

3で割った余りが1 $\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ 3で割った余りが1

p_n　　　　p_{n+1}

3で　"　2 $\nearrow \frac{1}{3}$

q_n

p_n+q_n は3の倍数が1回も出ない確率より　$p_n+q_n=(\frac{2}{3})^n$

$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$

$=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}\{(\frac{2}{3})^n-p_n\}$

$=\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^n$

$\therefore p_n=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ //

68 [2018 九州大]

1から4までの数字を1つずつ書いた4枚のカードが箱に入っている。箱の中から1枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を4で割った余りが0，1，2，3である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

69 [2014 大阪大]

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を5で割った余りが1である確率を p_n とし，余りが2，3，4のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　p_n+q_n を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n=\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。

70 [2013 一橋大]

サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1)　s_n が4で割り切れる確率を求めよ。

(2)　s_n が6で割り切れる確率を求めよ。

(3)　s_n が7で割り切れる確率を求めよ。

(1) $s_n = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}\cdot a_2 + \cdots + 10\cdot a_{n-1} + a_n$

s_n が4の倍数となるとき、$n \geqq 2$

$a_1 \sim a_{n-2}$ は何でもよくて

$\boxed{a_{n-1}}\boxed{a_n}$ が4の倍数となればよいから

12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64

$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $(n \geqq 2)$　$n=1$ のとき $\frac{1}{6}$

(2)

1の位に偶数がくればよい

s_n が6で割り切れる — 6

p_n とする

6の倍数

＝2の倍数かつ3の倍数

s_n が6で割り切れない

$1-p_n$　余り1 — 2

余り2 — 4

余り3 — 6

余り4 — 2

余り5 — 4

$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) = \frac{1}{6}$ $(n \geqq 1)$

$n=1$ のときも $p_n = 1$　$p_n = \frac{1}{6}$

(3) s_n を7で割った余りを r $(r=0,1,\cdots,6)$ とすると

$7k + r$ (k は整数)

と表せる a_{n+1} を1の位として

s_{n+1} は

$10(7k+r) + a_{n+1} = 7(10k+r) + 3r + a_{n+1}$

s_n が7で割り切れる — ×

q_n とする

s_n が7で割り切れない

$1-q_n$　余りが1　$a_{n+1}=4$

2　$a_{n+1}=1$

3　$a_{n+1}=5$

4　$a_{n+1}=2$

5　$a_{n+1}=6$

6　$a_{n+1}=3$

$q_{n+1} = \frac{1}{6}(1-q_n)$　$q_1 = 0$

$q_{n+1} = -\frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}$　$\alpha = -\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}$　$\therefore \alpha = \frac{1}{7}$

$q_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}(q_n - \frac{1}{7})$

$\{q_n - \frac{1}{7}\}$ は初項 $q_1 - \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$

公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列より

$q_n - \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$　$\therefore q_n = \frac{1}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

71 [2023 大阪大]

1個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする。

b_n を $b_n=\sum_{k=1}^{n}{a_1}^{n-k}a_k$ により定義し，b_n が7の倍数となる確率を p_n とする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

72 [2018 琉球大]

2つの箱A，Bがあり，どちらの箱にも赤玉と白玉が1個ずつ入っている。それぞれの箱から，無作為に玉を1個取り出し，取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す。n 回の操作の後，箱A，Bのどちらにも赤玉，白玉が1個ずつ入っている確率を p_n とする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。　(2)　p_n を用いて p_{n+1} を表せ。

(3)　自然数 n に対して，p_n を求めよ。

(1) $p_1 = \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{ともに赤} + \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{ともに白} = \frac{1}{2}$

$p_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{ちがう色}\times 2 = \frac{3}{4}$

(2) Aに着目して　(赤, 白)とする

n回目　$n+1$回目

$(1,1)_{p_n} \xrightarrow{\frac{1}{2}} (1,1)_{p_{n+1}}$

$\boxed{(2,0)\ (0,2)}_{1-p_n} \xrightarrow{1} (1,1)$

$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + 1 - p_n$

$p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + 1$　$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha + 1$　$\therefore \alpha = \frac{2}{3}$

(3) $p_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(p_n - \frac{2}{3})$

$\{p_n - \frac{2}{3}\}$ は初項 $p_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列より

$p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore p_n = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$

73 [1999 一橋大]

2つの箱A，Bのそれぞれに赤玉が1個，白玉が3個，合計4個ずつ入っている．1回の試行で箱Aの玉1個と箱Bの玉1個を無作為に選び交換する．この試行を n 回繰り返した後，箱Aに赤玉が1個，白玉が3個入っている確率 p_n を求めよ．

74 [2016 名古屋大]

玉が2個ずつ入った2つの袋A，Bがあるとき，袋Bから玉を1個取り出して袋Aに入れ，次に袋Aから玉を1個取り出して袋Bに入れる，という操作を1回の操作と数えることにする。Aに赤玉が2個，Bに白玉が2個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋Bに入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ とする。

(1)　$k=0, 1, 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0, 1, 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。