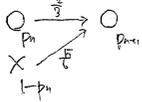


58 [日本大]

A君は日記をなるべくつけるようにした。日記をつけた日の翌日は確率 $\frac{2}{3}$ で日記をつけ、日記をつけなかった日の翌日は確率 $\frac{5}{6}$ で日記をつけているという。初日に日記をつけたとして、第 n 日に日記をつける確率を p_n とする。

- (1) $p_{n+1} = \square - \square p_n$ である。
- (2) p_n を求めよ。

∴ n日目 n+1日目



$$p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{5}{6} (1 - p_n)$$

$$= \frac{1}{6} p_n + \frac{5}{6}$$

$$\text{∴ } p_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{5}{6}, \quad p_1 = 1$$

$$p_{n+1} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} (p_n - \frac{5}{6})$$

$$\{ p_n - \frac{5}{6} \} \text{は等比数列 } p_1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

∴ $-\frac{1}{6}$ の等比数列より

$$p_n - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot (-\frac{1}{6})^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot (-\frac{1}{6})^{n-1}$$

$$\alpha = -\frac{1}{6} \alpha + \frac{5}{6}$$

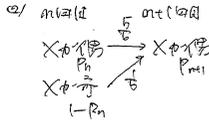
$$\therefore \alpha = \frac{5}{6}$$

60 [2019 学習院大]

さいころを n 回投げるとき、6の目が出た回数を X とし、 X が偶数である確率を P_n とする。

- (1) P_1, P_2 を求めよ。
- (2) P_{n+1} を P_n を用いて表せ。
- (3) P_n を求めよ。

$$\text{∴ } P_1 = \frac{1}{6}, \quad P_2 = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$



$$P_{n+1} = \frac{5}{6} P_n + \frac{1}{6} (1 - P_n)$$

$$\therefore P_{n+1} = \frac{2}{3} P_n + \frac{1}{6}$$

$$\text{∴ } P_{n+1} = \frac{2}{3} P_n + \frac{1}{6}$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \alpha + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} \alpha = \frac{1}{6} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} (P_n - \frac{1}{2})$$

$$\{ P_n - \frac{1}{2} \} \text{は等比数列 } P_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

∴ $\frac{2}{3}$ の等比数列より

$$P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$$

59 [2001 中央大]

ある工場の製品の不良率は、機械の状態によって日ごとに変化して、2%と4%の2通りだけある。ある日の不良率が2%であったとき、次の日に不良率が2%となる確率が $\frac{1}{2}$ 、またある日の不良率が4%であったとき、次の日に不良率が4%となる確率が $\frac{1}{4}$ であるとする。今日の不良率が4%であったものとして、次の問いに答えよ。ただし、明日を1日後、明後日を2日後とする。また、 n ($n \geq 1$) 日後に不良率が2%となる確率を p_n とする。

- (1) p_i ($i=1, 2, \dots, 7$) を求めよ。
- (2) p_n を p_{n-1} で表せ。
- (3) p_n を求めよ。

61 [2015 中央大]

1個のさいころを繰り返し投げ、3の倍数の目が出る回数を数える。いま、さいころを n 回投げるとき、3の倍数の目が奇数回出る確率を P_n とする。

- (1) P_2 および P_3 を求めよ。
- (2) P_{n+1} を P_n で表せ。
- (3) P_n を n の式で表せ。

62 [1997 神奈川大]

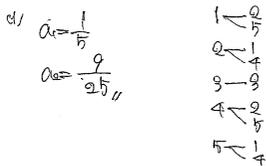
1つのさいころを n 回 ($n \geq 1$) 投げたとき、1の目が出る回数が偶数回である確率を p_n 、奇数回である確率を q_n とする。ただし、0回は偶数回と考える。

- (1) p_{n+1}, q_{n+1} を p_n, q_n で表せ。
- (2) $p_n - q_n$ を n で表せ。
- (3) p_n, q_n を n で表せ。

63 [2019 日本女子大]

1から5までの数字が1つずつ書かれた5枚のカードが入っている袋からカードを1枚取り出し、数字を調べてからもとに戻す。この試行を繰り返し行うとき、 n 回目までに出した n 個の数の合計を S_n とする。 S_n が3で割り切れる確率を a_n とする。

- (1) a_1, a_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (3) a_n を n の式で表せ。



e) 数列



$$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n + \frac{2}{5} (1 - a_n)$$

$$\therefore a_{n+1} = -\frac{1}{5} a_n + \frac{2}{5} \quad \alpha = -\frac{1}{5} \quad \beta = \frac{2}{5}$$

e) $a_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{5} (a_n - \frac{2}{5})$

$$\{a_n - \frac{2}{5}\}_{n \geq 1} \text{ は等比数列 } a_1 - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$$

1200 - $\frac{1}{5}$ の等比数列

$$a_n - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{5} \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

64 [2010 埼玉大]

各面に1から8までの数字が1つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ、 n 回目までに出した数字の合計を $X(n)$ とする。 $X(n)$ が3で割り切れる確率を a_n 、 $X(n)$ を3で割ったとき1余る確率を b_n 、 $X(n)$ を3で割ったとき2余る確率を c_n とする。ただし、1から8までの数字の出る確率はどれも同じとする。

- (1) a_1, b_1, c_1 を求めよ。
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n を用いて表せ。
- (3) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (4) a_n, b_n, c_n を求めよ。

65 [1994 京都大]

さいころを n 回続けて投げるとき、 k 回目に出る目の数を X_k とし、 $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ が7で割り切れる確率を p_n とする。

- (1) p_n を p_{n-1} を用いて表せ。
- (2) p_n を求めよ。

66 [2013 東北大]

袋の中に1, 2, 3, 4, 5の番号が1つずつ書かれた5つの玉が入っている。この中から無作為に1個の玉を取り出し、玉に書かれている数字を記録したのち袋に戻すという操作を行う。その操作を繰り返し、記録された数字の和が3の倍数になった時点で終了する。ただし、1回目で3の倍数が出た場合は、その時点で終了とする。 n 回目の操作で終了する確率を p_n とする。

- (1) p_1, p_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 p_n を n の式で表せ。

67 [2012 千葉大]

さいころを n 回 ($n \geq 2$) 投げ、 k 回目 ($1 \leq k \leq n$) に出る目を X_k とする。

- (1) 積 $X_1 X_2$ が18以下である確率を求めよ。
- (2) 積 $X_1 X_2 \dots X_n$ が偶数である確率を求めよ。
- (3) 積 $X_1 X_2 \dots X_n$ が4の倍数である確率を求めよ。
- (4) 積 $X_1 X_2 \dots X_n$ を3で割ったときの余りが1である確率を求めよ。

d) $X_1 X_2$ が18以下 $\rightarrow X_1 X_2$ の組み合わせ... $4 \leftarrow \frac{1}{6}$ $5 \leftarrow \frac{1}{6}$ $6 \leftarrow \frac{1}{6}$
 $= 1 - \frac{8^2}{9 \times 6} = \frac{7}{9}$

e) $X_1 X_2 \dots X_n$ が偶数 $\rightarrow 1 - X_1 X_2 \dots X_n$ が奇数

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

g) $X_1 X_2 \dots X_n$ が4の倍数 \rightarrow 2の倍数 \rightarrow 偶数

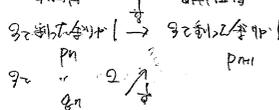
さいころ

さいころの出る確率

$$1 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

h) $X_1 X_2 \dots X_n$ が3で割り切れる確率 \rightarrow 3の倍数 \rightarrow 3の倍数

さいころ



$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} q_n$$

$$= \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n p_n \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

68 [2018 九州大]

1から4までの数字を1つずつ書いた4枚のカードが箱に入っている。箱の中から1枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回繰り返して行く。 k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし、積 $X_1 X_2 \dots X_n$ を4で割った余りが0, 1, 2, 3である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。 p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。

69 [2014 大阪大]

さいころを繰り返し投げ、 n 回目に出た目を X_n とする。 n 回目までに出した目の積 $X_1 X_2 \dots X_n$ を T_n で表す。 T_n を5で割った余りが1である確率を p_n とし、余りが2, 3, 4のいずれかである確率を q_n とする。

- (1) $p_n + q_n$ を求めよ。
- (2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。
- (3) $r_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ において r_n を求めることにより、 p_n を n の式で表せ。

70 [2013 一橋大]

サイコロを n 回投げ、 k 回目に出た目を a_k とする。また、 $s_n = s_{n-1} + 10^{n-k} a_k$ で定める。

- s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。
- s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。
- s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。

$$s_n = 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \dots + 10 a_{n-1} + a_n$$

s_n が 4 の倍数となる $n \geq 3$ のとき

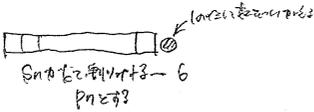
$$a_n - a_{n-1} \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\frac{10^{n-1}}{4} a_1 + \dots + 10 a_{n-1} + a_n \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\frac{9}{96} = \frac{1}{4} \pmod{2} \quad n \equiv 1 \pmod{6}$$

10
24
96
384
1536
6144

②



6の倍数
= 2の倍数かつ3の倍数

s_n が 6 で割り切れる

- 1 - p_n 残り 1 - 2
- 2 - p_n 残り 2 - 4
- 3 - p_n 残り 3 - 6
- 4 - p_n 残り 4 - 2
- 5 - p_n 残り 5 - 4

$$p_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} (1 - p_n) = \frac{1}{6} \pmod{6}$$

③ $s_n \equiv 7 \pmod{7}$ となる n の条件

$$s_{n+1} \equiv s_n + a_{n+1} \pmod{7}$$

$$s_{n+1} \equiv s_n + a_{n+1} \pmod{7}$$

$s_{n+1} \equiv 7 \pmod{7}$

$$10(s_n + a_{n+1}) + a_{n+1} \equiv 7 \pmod{7}$$

$$s_n + a_{n+1} \equiv 7 \pmod{7}$$

$$s_n + a_{n+1} \equiv 0 \pmod{7}$$

- 1 - q_n 残り 0
- 2 - q_n 残り 1
- 3 - q_n 残り 5
- 4 - q_n 残り 2
- 5 - q_n 残り 6
- 6 - q_n 残り 3

$$q_{n+1} = \frac{1}{6} (1 - q_n) \quad q_1 = 0$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{6} \quad \alpha = \frac{1}{6} \pmod{6} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{6}$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} (q_n - \frac{1}{6})$$

$$\{q_n - \frac{1}{6}\} \text{ は } q_1 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$q_n - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \therefore q_n = \frac{1}{6} \left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

71 [2023 大阪大]

1 個のさいころを n 回投げて、 k 回目に出た目を a_k とする。

b_n を $b_n = \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k$ により定義し、 b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする。

- p_1, p_2 を求めよ。
- 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

72 [2018 琉球大]

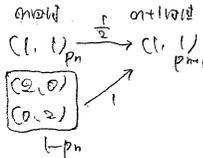
2 つの箱 A, B があり、どちらの箱にも赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている。それぞれの箱から、無作為に玉を 1 個取り出し、取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す。 n 回の操作の後、箱 A, B のどちらにも赤玉、白玉が 1 個ずつ入っている確率を p_n とする。

- p_1, p_2 を求めよ。
- p_n を用いて p_{n+1} を表せ。
- 自然数 n に対して、 p_n を求めよ。

$$p_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{4}$$

② A と B の状態 (赤, 白) を表す



$$p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + 1 - p_n$$

$$p_{n+1} = -\frac{1}{2} p_n + 1 \quad \alpha = -\frac{1}{2} \pmod{2} \quad \therefore \alpha = \frac{2}{2}$$

$$p_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} (p_n - \frac{2}{3})$$

$$\{p_n - \frac{2}{3}\} \text{ は } p_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

73 [1999 一橋大]

2 つの箱 A, B のそれぞれに赤玉が 1 個、白玉が 3 個、合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後、箱 A に赤玉が 1 個、白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。

74 [2016 名古屋大]

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき、袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ、次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる、という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個、B に白玉が 2 個入った状態から始め、この操作を n 回繰り返した後袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$

- $k=0, 1, 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。
- $k=0, 1, 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。