

標準問題演習 12. 場合の数

①

$$99 = 9 \times 11$$

Ω : 1から1000までの整数 とし 全体集合とす

A : 9の倍数の集合

B : 11 " とす

$m(P) \in P$ の要素の個数とす

99と互いに素であるものの個数を $m(\overline{A \cap B})$

$$\begin{aligned} m(\overline{A \cap B}) &= m(\overline{A \cap B}) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\ &= m(\Omega) - m(A \cap B) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= m(A) + m(B) - m(A \cap B) \\ &= 999 + 90 - 90 = 999 \end{aligned}$$

$$165 = 9 \times 5 \times 11 \quad \text{よ} \quad m(\overline{A \cap B}) = 1000 - 999 = 607 \text{ 個}$$

C : 5の倍数の集合とす

165と互いに素であるものの個数を $m(\overline{A \cap B \cap C})$

$$\begin{aligned} m(\overline{A \cap B \cap C}) &= m(\overline{A \cap B \cap C}) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\ &= m(\Omega) - m(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} m(A \cup B \cup C) &= m(A) + m(B) + m(C) \\ &\quad - m(A \cap B) - m(B \cap C) - m(C \cap A) \\ &\quad + m(A \cap B \cap C) \\ &= 999 + 90 + 200 - 90 - 66 - 66 + 6 \\ &= 515 \end{aligned}$$

よ

$$m(\overline{A \cap B \cap C}) = 1000 - 515 = 485 \text{ 個}$$

<point>

1. 和集合の要素の個数

②

d) 2の倍数の個数を

$$9 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 960 \text{ 個}$$

3の倍数の個数を

9の倍数は各位の和が9の倍数

各位の和が9の倍数は $(1+2+3+4+5+6=21)$

$(1, 2, 4, 5, 6), (1, 2, 3, 4, 5)$

よ

$$5! \times 2 = 240 \text{ 個}$$

$$e) 6 = 2 \times 3$$

6の倍数は2の倍数かつ3の倍数

$$9 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ 個}$$

$$f) 6 \times 5 \times 4 \rightarrow 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ 個}$$

$$4 \times 5 \times 3 \rightarrow 24 \text{ 個}$$

$$3 - 6 \times 4 \times 2$$

$$364 \text{ 個}$$

$$g) 90 = 2 \times 3 \times 5 \quad \Omega: \text{全体集合}$$

A : 2の倍数

B : 3 " "

C : 5 " の集合とす

また $m(P)$ は $m(\overline{A \cap B \cap C})$ ($m(P)$: 集合 P の要素の個数とす)

$$m(\overline{A \cap B \cap C}) = m(\overline{A \cap B \cap C})$$

$$= m(\Omega) - m(A \cap B \cap C)$$

ここで

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C)$$

$$- m(A \cap B) - m(B \cap C) - m(C \cap A)$$

$$+ m(A \cap B \cap C)$$

$$= 960 + 240 + 200 - 120 - 120 - 120 + 0$$

$$= 552 \text{ 個}$$

よ

$$m(\overline{A \cap B \cap C}) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 - 552$$

<point>

$$= 168 \text{ 個}$$

1. 個数

[3]

I. d) $4 \times 3 \times 5! = 1440 \text{ 通り}$

e) $4! \times 5 \times 4 \times 3 = 1440 \text{ 通り}$

② 女₁女₂女₃男₁男₂男₃

$= {}_6C_2 (6! \times 2! - 5! \times 2! \times 2) \times 5! \times (2-4) \times 3$
 $= 2880 \text{ 通り}$

③ $(4-1)! \times 4 \times 3 \times 2 = 144 \text{ 通り}$

① 男 1 ②
男 男
③ 男 ④

II. $a_1=2, a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4, a_5 \neq 5$

d) $a_2=1$ のとき

$a_2=1$ のとき 3~5 の数から選ぶ

$a_3 \ a_4 \ a_5$

4-5-3

5-3-4 の2通り

e) $a_2 \neq 1$ のとき

1を2に置きかえて

$a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4, a_5 \neq 5$ とは3!通りあり同じ

$a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5$

3 $\swarrow$ 2-5-4
4-5-2
5-2-4
4 $\swarrow$ 2-5-3
5 $\swarrow$ 2-3
3-2
5 $\swarrow$ 2-3-4
4 $\swarrow$ 2-3
3-2

の9通り

d), e) より

$2+9=11 \text{ 通り}$

$a_1 \neq 1, a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4, a_5 \neq 5$ とは3!通りの何通り

$a_1=3, 4, 5$ のときも同様に11通りある

$11 \times 4 = 44 \text{ 通り}$

<point>

1. 全部並べると11通り

2. 完全11通り (中々11通り)

[4]

d) $\frac{8!}{3!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 9360 \text{ 通り}$

e) $\frac{7!}{3!} = 840 \text{ 通り}$

③ $\frac{6!}{2!} = 360 \text{ 通り}$

④ AA A.M.M.Y.N.I. の並べ方は
 $\frac{7!}{2!} = 2520$

AA A.A.A. 12! のうちから [別解]

$2520 - 9360 = 2160 \text{ 通り}$

全事象

全体 A.A.A. 12!

⑤ AA A.M.M.Y.N.I. として12! 通り

$6! - 5! = 600 \text{ 通り}$

<point>

1. 12! のうちから11通り

[5]

I. d) 2つのEを1列に並べる方法は

$\frac{8!}{5!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 1} = 168 \text{ 通り}$

黒と赤のEにあり並べ方は

左から黒赤黒と並べるとは異なる

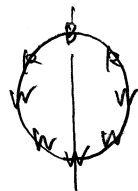
${}^3C_2 = 3 \text{ 通り}$

e) 黒を固定して

$\frac{7!}{5!2!} = 21 \text{ 通り}$

輪に並べる方法

d) 左右対称

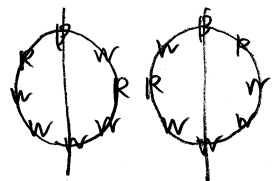


3通り

(1, 4) 順列 1通り

(2, 3) 順列 1通り

e) 左右非対称



$2! - 1 = 1 \text{ 通り}$

(1, 4) 順列 1通り

(2, 3) 順列 1通り

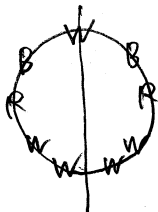
より

$3 + \frac{1 \times 2}{2} = 12 \text{ 通り}$

③ 1. 4! のうち 2! の方が 2

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6 \text{通り}$$

うち左右対称は 3通り



$$\frac{4!}{2!} = 12 \text{通り}$$

5. 2

$$2 + \frac{72}{2} = 38 \text{通り}$$

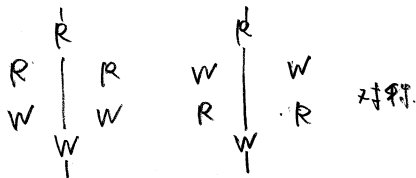
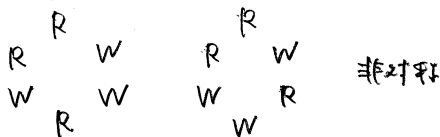
II. d) $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 \text{通り}$

② a) $\begin{pmatrix} A & B & A & B \\ B & A & B & A \end{pmatrix}$? 重複は 2通り

iii) 2通り以外 重複 6通りあり

$$\frac{2}{2} + \frac{18}{6} = 4 \text{通り}$$

③ ② の 4通り



奇数個にできる方法は

$$2 + \frac{2}{2} = 3 \text{通り}$$

④ 1. 4! のうち 2! の方が 2

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6 \text{通り}$$

奇数個にできる方法は

$$3 + \frac{2}{2} = 4 \text{通り}$$



<point>

1. 1. 4! のうち 2! の方が 2

2. 1. 4! のうち 2! の方が 2

[6]

d) T 4個, Y 6個の並べ方と分けて

$$\frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{通り}$$

② A → C: $\frac{9!}{1! \cdot 2!} = 36 \text{通り}$

C から D へ通るよ、B から C へ通るよ

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{9!}{1! \cdot 2! \cdot 4!} = 105 \text{通り}$$

$$= 95 - 3 \times 6 = 17 \text{通り}$$

よって

$$3 \times 17 = 51 \text{通り}$$

③ d) T | Y | T | Y のとき

2! 2! のとき 3! : 12通り T, Y 入って

残り 2! の T と 4! の Y 入って 3! 通り

$$001 \quad 00001$$

$$\frac{9!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} \times \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 15 \text{通り}$$

④ Y | T | Y | T のとき

(2! 2! 1! 1!) 15通り

⑤ a) ④ より

$$15 + 15 = 30 \text{通り}$$

<point>

1. 奇数個経路の数を

[7]

3! の並べ方は全部で

$$nC_3 = \frac{n!}{3!} = \frac{n!}{6 \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{n!}{12} \text{通り}$$

直円三形とよぶ

$$\frac{n}{2} \times (n-2) = \frac{1}{2} n(n-2) \text{ 通り}$$

重複あり

金形三形とよぶ

$n=2m$ (m :自然数) とし

A_1 は金形の1つとすると金形三形は

$$(m-1)C_2 \times 2 = (m-1)(m-2)$$

$A_2, \dots, A_m \in$ 金形の1つとすると金形三形は A

(1) 同様

$$(m-1)(m-2) \text{ 通り}$$

よって金形三形の総数は

$$2m(m-1)(m-2) \times \frac{1}{2}$$

金形は2つあるから1つを金形とすると重複を避ける

$$= m(m-1)(m-2)$$

$$= \frac{1}{8} n(n-2)(n-4) \text{ 通り}$$

$$n=2m-1 \text{ とし } m=\frac{n+1}{2}$$

(2) 同様にして

$$(2m-1)(m-1)C_2 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= (2m-1) \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

$$= \frac{1}{8} n(n-1)(n-3) \text{ 通り}$$

三形は金形・直円・金形三形の3つあり

1つが金形とすると直円三形とよぶことになる

$$\frac{1}{6} n(n-1)(n-2) - \frac{1}{8} n(n-1)(n-3)$$

$$= \frac{1}{24} n(n-1) \{ 4(n-2) - 3(n-3) \}$$

$$= \frac{1}{24} n(n-1)(n+1) \text{ 通り}$$

<point>

1. 重複を避ける

⑧

d) 0 24 1個、1 2個の並べ方に注意

$$\frac{26!}{24!2!} = \frac{26 \times 25}{2 \times 1} = \boxed{325} \text{ 通り}$$

e)

	d)	e)	
x, y, z がすべて異なる	1	1	(3通り)
x, y, z のうち2つが同じ	36	12	(36通り)
x, y, z がすべて同じ	325	48	(325通り)
		$= 288$	

$$1 + 12 + 48 = \boxed{61} \text{ 通り}$$

$$b) x + 2y + 3z = 24$$

$$(x+y+z) + (y+z) + z = 24$$

$$x = x+y+z, y = y+z, z = z \text{ とおく}$$

$$x \leq y \leq z \text{ から } x+y+z = 24, 2y$$

$$\boxed{61} \text{ 通り}$$

<point>

1. 重複を避ける

⑨

$$d) {}^nC_2 \times {}^nC_3 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{1260} \text{ 通り}$$

2人の着る服の数は3部屋に2人ずつ

$$(260 - ({}^7C_3 + {}^7C_4 + {}^7C_5 + {}^7C_6 + {}^7C_7))$$

$$= (260 - (35 + 35 + 35 + 35 + 35))$$

$$= \boxed{910} \text{ 通り}$$

e) 着る服の数は3部屋に3人ずつ

$$\frac{910}{2} + 350 = \boxed{805} \text{ 通り}$$

着る服の数は3

<point>

1. 重複を避ける

10

d) $9^6 = 729$ 通り

e) 061何と12何の並べ方にあるから

$$\frac{8!}{6!2!} = 28 \text{ 通り}$$

3)

球が1箱に5つ 3通り $\leftrightarrow$ 12通り
その外 6通り $\leftrightarrow$ 1通り

$$\frac{3}{9} + \frac{726}{6} = 122 \text{ 通り}$$

4)

左の箱が何もない	1通り	1通り
200箱が何もない	9通り	9通り
左の箱が何もない + 200箱	18通り	9通り
		7通り

<point>

1. 組合せ

11

d) $(2+x)^n = (2+x)^n$

$$= {}^nC_0 2^n + {}^nC_1 2^{n-1} x + \dots + {}^nC_r 2^{n-r} x^r + \dots + {}^nC_n x^n$$

より

$$a_r = {}^nC_r 2^{n-r}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{a_r}{a_{r+1}} &= \frac{{}^nC_r 2^{n-r}}{{}^nC_{r+1} 2^{n-(r+1)}} = \frac{2 \cdot \frac{n!}{r!}}{\frac{n!}{(r+1)!}} \\ &= \frac{2(r+1)}{n-r} \end{aligned}$$

g) $n=49$ あり

$$\frac{a_r}{a_{r+1}} = \frac{2(r+1)}{99-r}$$

$$\frac{a_r}{a_{r+1}} < 1 \text{ あり}$$

$$\frac{2(r+1)}{99-r} < 1$$

$$2r+2 < 99-r$$

$$3r < 97 \therefore r < 32.3 \therefore r \leq 32 \therefore a_r < a_{r+1}$$

$$\frac{a_r}{a_{r+1}} > 1 \text{ あり } r > 32 \therefore a_r > a_{r+1}$$

より

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{31} < a_{32} < a_{33} > a_{34} > \dots$$

より

$$r=33$$

<point>

1. 二項定理

2. 二項係数の性質

12

d) $(1+a)^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k a^k$

e) $2^{10} = (20+1)^{10}$

$$= {}^{10}C_0 20^{10} + {}^{10}C_1 20^9 + \dots + {}^{10}C_8 20^2 + {}^{10}C_9 20 + {}^{10}C_{10} 1$$

$$= 400N + 201 \quad (N: \text{整数})$$

より、余りは 201

3) $(9^n + 21^n)$

$$= (20-1)^n + (20+1)^n$$

$$= \frac{{}^nC_0 20^n + {}^nC_1 20^{n-1} (-1) + \dots + {}^nC_n 20^0 (-1)^n}{400 \text{ あり}} + \frac{{}^nC_0 20^n + {}^nC_1 20^{n-1} (1) + \dots + {}^nC_n 20^0 (1)^n}{400 \text{ あり}}$$

$$+ \frac{{}^nC_0 20^n + \dots + {}^nC_n 20^0}{400 \text{ あり}} + {}^nC_{n-1} 20 + {}^nC_n 1$$

$$= 400N + 20n \{ (-1)^{n-1} + 1 \} + (-1)^n + 1$$

より、余りは

$$\begin{cases} 40n & (n: \text{偶数}) \\ 2 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

より、残りは

[13]

$$d) (1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad \text{①}$$

$x=1$ を代入して

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = 2^n$$

$$e) \left[\frac{2}{3} \right] a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + na_n$$

① の両辺を x で微分して

$$n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1}$$

$x=1$ を代入して

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n \cdot 2^{n-1}$$

[3.11 例]

$$k n C_k = n n C_{k-1} \quad \text{①} \quad \leftarrow a_{k-1} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = \frac{n}{k} a_{k-1}$$

$$\begin{aligned} \text{互換} &= n \cdot \{a_{n-1} C_0 + a_{n-2} C_1 + \dots + a_1 C_{n-1}\} \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

③ ① の両辺を x で微分して

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = a_0 + \frac{a_1}{2} x + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C \quad (C: \text{積分定数})$$

$$x=0 \text{ を代入すると } C = \frac{1}{n+1}$$

$x=1$ を代入して

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} = a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \text{互換} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$f) (1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$(x+1)^n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\left(\frac{(1+x)^n (x+1)^n}{x^n \text{ の係数}} \right) = (a_0)^2 + (a_1)^2 + \dots + (a_n)^2$$

$(1+x)^n (x+1)^n$ の x^n の係数は

$$(1+x)^n (x+1)^n = (1+x)^{2n}$$

$$2n C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

<point>

1. 二項係数の公式

[14]

$$d) n C_2 = \frac{n(n-1)}{2} = n \cdot \frac{n-1}{2} \quad (n-1 \text{ は } n \text{ の } 1 \text{ 個の } 2 \text{ 倍})$$

$$\frac{n-1}{2} = k \quad (k: \text{整数}) \text{ とおくと } n=2k+1$$

$$n=2k+1 \quad (k \geq 1)$$

n は奇数

$$e) p C_k = \frac{p}{k} \cdot \frac{(p-1)!}{(k-1)!}$$

$$= \frac{p}{k} p C_{k-1}$$

$$\therefore p C_k = p C_{k-1}$$

p は素数であるから k と p は互いに素より $p C_k$ は p の倍数

$$g) (n+1)^p - n^p$$

$$= p C_1 n^{p-1} + p C_2 n^{p-2} + \dots + p C_{p-1} n + p C_p$$

$$= p C_1 n^{p-1} + p C_2 n^{p-2} + \dots + p C_{p-1} n$$

① から $p C_1, p C_2, \dots, p C_{p-1}$ は p の倍数より p の倍数

<point>

1. 2.1.2 の定理