

2.2 関数の連続・微分可能

(1) 関数の連続性

これまで学んだ関数では、 $y=x^2$ や $y=\sin x$ のように、そのグラフが1つのつながった曲線になるものが多かった。このような関数を $f(x)$ とすると、定義域の任意の x の値 a に対して、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つ。しかし、これが成り立たない関数もある。

例えば、 $x \neq 0$ のとき $f(x)=x^2+1$ 、 $x=0$ のとき $f(x)=0$ で定義される関数 $y=f(x)$ のグラフは、 $x=0$ で切れている。このとき、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, f(0) = 0 \text{ であるから, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \text{ である。}$$

一般に、関数 $f(x)$ において、その定義域の x の値 a に対して、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。このとき、 $y=f(x)$ のグラフは $x=a$ でつながっている。

また、関数 $f(x)$ がその定義域の x の値 a で連続でないとき、 $f(x)$ は $x=a$ で不連続であるという。このとき、 $y=f(x)$ のグラフは $x=a$ で切れている。上の例の関数 $y=f(x)$ は、 $x=0$ で不連続である。

関数の連続についてまとめると、次のようになる。

関数の連続性

a を関数 $f(x)$ の定義域に属する値とするとき、関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは、次の2つのことが満たされていることである

1. 極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在する

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つ

a が $f(x)$ の定義域に属し、定義域の左端または右端である場合には、それぞれ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ または $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。例えば、 $f(x)=\sqrt{x}$ において、定義域は

$x \geq 0$ であり, x の値 0 において $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0)$ であるから, $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

極限値の性質から分かるように, 関数 $f(x), g(x)$ が定義域の x の値 a で連続ならば,

1. $kf(x) + lg(x)$ (k, l は定数)

2. $f(x)g(x)$

3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(a) \neq 0$)

も $x=a$ で連続である。

例えば, $f(x)=x$ はすべての x の値で連続であるから, これらの性質より x の整式で表される関数は, すべての x の値で連続である。

また, 分数関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ は, グラフは $x=0$ のところで切れている。

しかし, この関数の定義域は集合 $\{x \mid x \neq 0\}$ であり, 関数 $f(x)$ は, 定義域のすべての x の値で連続である。

一般に, 関数 $f(x)$ が定義域のすべての x の値で連続であるとき, $f(x)$ は連続関数であるという。整式で表される関数や分数関数は連続関数である。また, 無理関数, 三角関数, 指数関数, 対数関数なども連続関数である。

区間 $a \leq x \leq b$ を閉区間といい, 区間 $a < x < b$ を开区間という。これらの区間を, それぞれ $[a, b]$, (a, b) で表す。

さらに, 区間 $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a < x, x \leq b$ を, それぞれ $[a, b)$, $(a, b]$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$ で表す。

ある区間を関数 $f(x)$ の定義域と考えたとき, その区間のすべての点で $f(x)$ が連続であるとき, $f(x)$ はその区間で連続であるという。

例えば, 関数 $y=[x]$ は区間 $[0, 1)$ で連続であるが, $[0, 1]$ で連続でない。

例1

次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ を求めよ.

(2) 上で定めた関数 $f(x)$ がすべての x について連続であるように, a, b の値を定めよ.

(解説)

(1) (i) $x < -1$ のとき, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^{2n-2}} + \frac{b}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1 - \frac{1}{x}$

(ii) $x = -1$ のとき, $f(-1) = \frac{a - b + 2}{2}$

(iii) $-1 < x < 1$ のとき, $f(x) = ax^2 + bx$

(iv) $x = 1$ のとき, $f(1) = \frac{a + b}{2}$

(v) $1 < x$ のとき, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^{2n-2}} + \frac{b}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1 - \frac{1}{x}$

(2) $f(x)$ は $x = \pm 1$ 以外の x で連続である

$x = -1$ で連続であるとき,

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) \text{ より}$$

$$\frac{a - b + 2}{2} = 2 = a - b \cdots \textcircled{1}$$

$x = 1$ で連続であるとき,

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \text{ より}$$

$$\frac{a + b}{2} = a + b = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より, $a = 1, b = -1$

例2

実数 x に対して $[x]$ は $n \leq x < n+1$ を満たす整数 n を表すとき、

- (1) 関数 $y = [x](x - [x])$ のグラフを $0 \leq x \leq 3$ の範囲でかけ。
- (2) 関数 $f(x) = ([x] + a)(bx - [x])$ が $x=1$ と $x=2$ で連続となるように定数 a, b の値を求めよ。また、 $y = f(x)$ のグラフを $-3 \leq x \leq 3$ の範囲でかけ。

(解説)

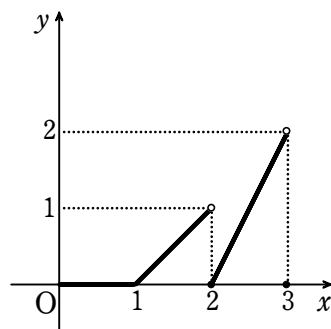
(1) $0 \leq x < 1$ のとき $y = 0$

$1 \leq x < 2$ のとき $y = x - 1$

$2 \leq x < 3$ のとき $y = 2(x - 2)$

$x = 3$ のとき $y = 0$

よって、グラフは右図



(2) $0 \leq x < 1$ のとき $f(x) = abx$

$1 \leq x < 2$ のとき $f(x) = (1 + a)(bx - 1)$

$2 \leq x < 3$ のとき $f(x) = (2 + a)(bx - 2)$

$x=1, x=2$ で連続となるとき

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1), \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2) \text{ より}$$

$$ab = (1 + a)(b - 1), (1 + a)(2b - 1) = (2 + a)(2b - 2)$$

$$\therefore a = 1, b = 2$$

このとき、 $f(x) = ([x] + 1)(2x - [x])$

よって

$-3 \leq x < -2$ のとき $f(x) = -2(2x + 3)$

$-2 \leq x < -1$ のとき $f(x) = -(2x + 2)$

$-1 \leq x < 0$ のとき $f(x) = 0$

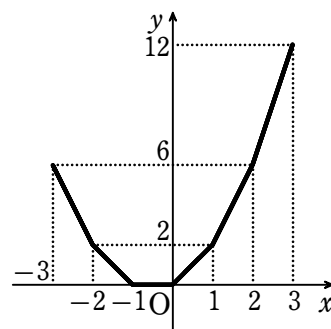
$0 \leq x < 1$ のとき $f(x) = 2x$

$1 \leq x < 2$ のとき $f(x) = 2(2x - 1)$

$2 \leq x < 3$ のとき $f(x) = 3(2x - 2)$

$f(3) = 12$

よって、グラフは右図



(2) 連続関数の性質

関数 $y = x^2$ は連続関数である。この関数を閉区間 $[-1, 2]$ で考えると、 $x = 2$ で最大値 4、 $x = 0$ で最小値 0 をとります。また、开区間 $(-1, 2)$ で考えると、最小値は 0、最大値はなしとなる。一般に次のことが成り立つ。

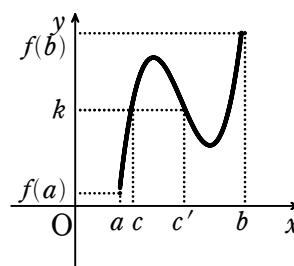
最大値・最小値の原理

閉区間で連続な関数は、その閉区間で最大値および最小値をもつ

これに対して、开区間で連続な関数はその开区間で最大値や最小値をもつことももたないこともある。これらの命題も、実数の連続性というものが関わり、現時点では証明できないので「原理」としておく。現時点では直感的な理解のみで、深入りはしなくてよい。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば、この区間での関数のグラフには切れ目がない。

よって、右の図からわかるように、 $f(a) \neq f(b)$ のとき、 $f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値をとる。



したがって、次の中間値の定理が成り立つ。

中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a) \neq f(b)$ ならば、 $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して、

$$f(c) = k$$

を満たす実数 c が a と b の間に存在する

中間値の定理から、次のことが成り立つ。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば、方程式 $f(x) = 0$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ

(3) 微分係数

関数 $f(x)$ について、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ または $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ が存在するとき、これを $f(x)$ の $x = a$ における微分係数、または変化率といい、 $f'(a)$ と表します。 $f'(a)$ の定義は次のようにまとめられる。

微分係数

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

関数 $f(x)$ について、 $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するならば、 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという。

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線が存在し、微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ の点 A における接線の傾きを表している。

【注】関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能でないとき、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線は存在しないか接線は x 軸に垂直な直線である。

例3

関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$ と定義する。「微分係数の定義」に従って、 $f(x)$ の $x = 0$ における微分係数を求めよ。

解説

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 1 = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (h + 1) = 1 \text{ より}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$$

よって、 $f(x)$ の $x = 0$ における微分係数は 1

(4) 微分可能と連続

関数 $f(x)$ に次のことが成り立つ。

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、 $x=a$ で連続である

この命題の逆、すなわち関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続ならば、 $x=a$ で微分可能である。という命題は偽である。

例4

$f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。

- (1) 関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であることの定義を述べよ。
- (2) 関数 $f(x)$ が $x=a$ において連続であることの定義を述べよ。
- (3) 関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能ならば、 $x=a$ において連続であることを証明せよ。

解説

(1) 関数 $f(x)$ について、微分係数 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するとき、 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという

(2) 関数 $f(x)$ について、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ のとき、 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという

(3) 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、 $f'(a)$ が存在して

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right\} = f'(a) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

よって、 $f(x)$ は $x=a$ で連続である

例5

- (1) 関数 $f(x) = |x|$ が $x=0$ において微分可能でないことを微分の定義に基づいて示せ。
- (2) $y = x|x|$ のグラフの概形をかけ。
- (3) m は自然数とする。関数 $g(x) = x^m|x|$ が $x=0$ において微分可能であるか微分可能でないかを理由をつけて答えよ。

解説

$$(1) \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \text{ より}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \text{ は存在しない}$$

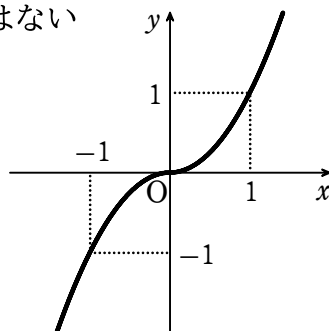
よって、 $f(x)$ は $x=0$ において微分可能でない

【注】 $f(x)$ は $x=0$ で連続であるが、微分可能ではない

$$(2) x \geq 0 \text{ のとき, } y = x^2$$

$$x < 0 \text{ のとき, } y = -x^2$$

よって、 $y = x|x|$ のグラフの概形は、右図



(3) m は自然数であるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^m \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} h^m = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{h^m \cdot (-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (-h^m) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \text{ が存在する}$$

よって、 $g(x)$ は $x=0$ において微分可能である

例6

関数 $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x & (x \geq 2) \\ \beta x^2 - \alpha x & (x < 2) \end{cases}$ が $x=2$ で微分可能となるような α, β の値を求めよ。

【解説】

$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき, $f(x)$ は $x=2$ で連続であるから

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2) \text{ より}$$

$$8 + 2\alpha = 4\beta - 2\alpha$$

$$\therefore \beta - \alpha = 2 \cdots \textcircled{1}$$

また

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$\alpha + 12 = 4\beta - \alpha$$

$$\therefore \alpha - 2\beta = -6 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \alpha = 2, \beta = 4$$

例7

関数 $f(x)$ がすべての実数 s, t に対して $f(s+t) = f(s) + f(t)$ を満たしているとき

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であれば, $f(x)$ はすべての実数 a に対して $x=a$ で微分可能であることを証明せよ。

(3) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能で $f'(0) = 0$ のとき, $f(x)$ を求めよ。

解説

(1) $s=t=0$ を代入して

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

(2) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0)$$

が存在する

$x=a$ において

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) + f(h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0)$$

よって, すべての実数 a に対して $f'(a) = f'(0)$ が存在するから

すべての実数 a に対して $x=a$ で微分可能である

(3) $f'(0) = 0$ のとき, (2)より

$$f'(x) = f'(0)$$

$$\therefore f'(x) = 0$$

よって

$$f(x) = C \text{ (} C \text{ は定数)}$$

$$f(0) = 0 \text{ より}$$

$$f(x) = 0$$

補1

a, b, c, d は実数とする。関数

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \leq -1) \\ ax^2 + bx + c & (-1 < x < 1) \\ d-2x & (1 \leq x) \end{cases}$$

がすべての x で微分可能であるとき、 $a = \text{ }^{\text{ア}} \boxed{}$ 、 $d = \text{ }^{\text{イ}} \boxed{}$ である。

(解説)

微分可能な関数は連続であるから

$f(x)$ は $x = \pm 1$ でも連続より

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = f(-1) \quad \therefore a - b + c = -2 \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) \quad \therefore a + b + c = d - 2 \dots \textcircled{2}$$

また、 $x \neq \pm 1$ のとき

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & (x < -1) \\ 2ax + b & (-1 < x < 1) \\ -2 & (1 < x) \end{cases}$$

すべての x で微分可能であるためには、

$f'(-1), f'(1)$ が存在すればよい

$x = -1$ で微分可能であるから

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \text{ より} \\ -2a + b = 1 \dots \textcircled{3}$$

$x = 1$ で微分可能であるから

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ より} \\ 2a + b = -2 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より, } a = \text{ }^{\text{ア}} -\frac{3}{4}, b = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } d = 2b = \text{ }^{\text{イ}} -1$$

補2

$1+2x-3x^2 \leq f(x) \leq 1+2x+3x^2$ が成り立つような関数 $f(x)$ に対し、 $f'(0)$ を右側極限と左側極限を考えることにより求めよ。

(解説)

$1+2x-3x^2 \leq f(x) \leq 1+2x+3x^2$ に $x=0$ を代入すると

$$1 \leq f(0) \leq 1 \quad \therefore f(0) = 1$$

よって

$$2x-3x^2 \leq f(x) - f(0) \leq 2x+3x^2 \dots \textcircled{1}$$

$x > 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ の各辺を x で割ると

$$2-3x \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 2+3x$$

$\lim_{x \rightarrow +0} (2-3x) = \lim_{x \rightarrow +0} (2+3x) = 2$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$$

また、 $x < 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ の各辺を x で割ると

$$2+3x \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 2-3x$$

$\lim_{x \rightarrow -0} (2+3x) = \lim_{x \rightarrow -0} (2-3x) = 2$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$$

よって

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$$

補3

微分可能な x の関数 $f(x)$ が任意の実数 x, y に対して次の関数を満たす。

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\{f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 = 1$$

$$f'(x+y) = f'(x)f'(y) - f(x)f(y)$$

$$f'(0) = 1$$

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $f'(x)$ は偶関数であることを証明せよ。

(3) $f'(u) - f'(v) = -2f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right)$ を証明せよ。

(4) $f'(x)$ が微分可能であることを示し、 $f''(x) = -f(x)$ を証明せよ。

解説

$$f(-x) = -f(x) \dots \textcircled{1}$$

$$\{f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$f'(x+y) = f'(x)f'(y) - f(x)f(y) \dots \textcircled{3}$$

$$f'(0) = 1 \dots \textcircled{4}$$

とする

(1) ①に $x=0$ を代入して

$$f(0) = -f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

(2) ①の両辺を微分すると

$$f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(x) \cdot (x)'$$

$$f'(-x) = f'(x)$$

よって、 $f'(x)$ は偶関数である

(3) ③に $y = -y$ を代入すると

$$f'(x-y) = f'(x)f'(-y) - f(x)f(-y)$$

$$f'(x-y) = f'(x)f'(y) + f(x)f(y) \dots \textcircled{5}$$

③-⑤より

$$f'(x+y) - f'(x-y) = -2f(x)f(y)$$

$x+y=u, x-y=v$ とすると

$$f'(u) - f'(v) = -2f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

(4) ④より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \quad \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1 \dots \textcircled{6}$$

(3)より

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2f\left(x + \frac{h}{2}\right)f\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -f\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{f\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \right\}\end{aligned}$$

⑥より

$$= -f(x)$$

よって、 $f'(x)$ には導関数が存在し、微分可能である
したがって、 $f''(x) = -f(x)$