

高3理系数学 標準問題演習 演習 11.積分(3)

1 [1998 東京理科大]

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+1}{n+k} \right)$ を求めよ.

2 [2013 東京理科大]

数列 $a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{2n P_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の極限値は $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[r]{\quad}$ である。

数列 $b_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{4n P_{2n}}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の極限値は $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt[1]{\quad}$ である。

数列 $c_n = \sqrt[n]{\frac{8n P_{4n}}{6n P_{4n}}}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の極限値は $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt[u]{\quad}$ である。

ただし, ${}_m P_r = \frac{m!}{(m-r)!}$ である。また, 記号 $\sqrt[n]{\quad}$ は n 乗根を表す。

3 [I. 2022 東北大 II. 2019 早稲田大]

I. 正の整数 n に対して, $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ とする。

(1) 正の実数 x に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

(2) 極限値 $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

II. 実数 x に対し $[x]$ を $x-1 < [x] \leq x$ を満たす整数とする。次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \right]$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} (1 + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n}])$

4 [I. 2007 埼玉大 II. 2008 琉球大 III. 2007 首都大学東京]

I. 半径 1 の円に内接する正 n 角形の異なる 2 つの頂点を結ぶ線分 (辺と対角線) の総数

を M_n , それらの長さの総和を L_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{M_n}$ を求めよ。

高3理系数学 標準問題演習 演習 11.積分(3)

Ⅱ. O を原点とする空間内に n 個の点 $P_k \left(\frac{k}{n}, 2 - \frac{k}{n}, 0 \right)$ ($k=1, 2, \dots, n$) をとる。

また, z 軸上に点 Q_k を, 線分 $P_k Q_k$ の長さが 2 になるようにとる。ただし, Q_k の z 座標は正とする。

- (1) 三角形 $OP_k P_{k+1}$ の面積を求めよ。ただし, $1 \leq k \leq n-1$ とする。
- (2) 三角錐 $OP_k P_{k+1} Q_k$ の体積 V_k を求めよ。ただし, $1 \leq k \leq n-1$ とする。
- (3) $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ とおくと, I を定積分を用いて表せ。ただし, $V_0=0$ とする。
- (4) I の値を求めよ。

Ⅲ. 座標平面上の点 (x, y) で x と y がともに整数であるものを格子点と呼ぶ。

$n \geq 2$ である整数 n に対して, 3 つの条件

$$x^2 + y^2 < n^2, \quad x > 0, \quad y > 0$$

を満たす格子点 (x, y) の総数を $P(n)$ で表す。

- (1) 不等式 $\sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{n^2 - k^2} - 1) \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 等式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2} = \frac{\pi}{4}$ が成り立つことを示せ。

5 [Ⅰ. 1999 名古屋大 Ⅱ. 2005 早稲田大]

Ⅰ. N 個 ($N \geq 2$) の箱の中に 1 回に 1 つずつ無作為に玉を入れてゆく。玉が 2 つ入った箱ができたなら, そこでその手続きを中止する。ちょうど k 回目で玉が 2 つ入った箱ができ

る確率を $P(N, k)$ とする。

- (1) $2 \leq k \leq N+1$ のとき, $P(N, k)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log P(2N, N+1)$ を区分求積法を用いて求めよ。

Ⅱ. 袋の中に 1 から n までの番号のついた n 個の玉が入っている。この袋から玉を 1 個取り出し, 番号を調べてもとに戻すことを r 回行うとき, 取り出された玉の番号の最大値を X とする。

- (1) $k=1, 2, \dots, n$ に対して, X がちょうど k となる確率を求めよ。
- (2) $r=2$ のとき, X の期待値を求めよ。
- (3) 一般の r に対して X の期待値を E_n とおくと, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n}$ を求めよ。

高3理系数学 標準問題演習 演習 11.積分(3)

6 [I . 2010 岡山県立大 II . 2014 大阪大 III . 2009 宮崎大]

I . n が自然数のとき, 次の不等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

II . $\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

III . n を自然数とすると, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right)$ を求めよ。

7 [2005 信州大]

(1) k を 2 以上の自然数とすると,

$$\int_{k-1}^k \log x dx < \log k < \int_k^{k+1} \log x dx$$

であることを示せ。

(2) すべての自然数 n について,

$$n^n e^{-n} < n! < (n+1)^{n+1} e^{-n}$$

であることを示せ。

8 [2007 東京大]

(1) $0 < x < a$ を満たす実数 x , a に対し, 次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

(2) (1) を利用して, $0.68 < \log 2 < 0.71$ を示せ。ただし, $\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

9

 [2005 東京医科歯科大]

次の条件 (A), (B), (C) を満たす関数 $f(x)$ ($x > 0$) を考える。

(A) $f(1) = 0$

(B) 導関数 $f'(x)$ が存在し, $f'(x) > 0$ ($x > 0$)

(C) 第2次導関数 $f''(x)$ が存在し, $f''(x) < 0$ ($x > 0$)

- (1) $a \geq \frac{3}{2}$ のとき, 次の3つの数の大小を比較せよ。

$$f(a), \quad \frac{1}{2} \left\{ f\left(a - \frac{1}{2}\right) + f\left(a + \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx$$

- (2) 整数 n ($n \geq 2$) に対して, 次の不等式が成立することを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^n f(x) dx < \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n) < \int_1^n f(x) dx$$

- (3) 次の極限値を求めよ。ただし, $\log$ は自然対数を表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \log n! - \log n^n}{\log n}$$