

第1章 数と式

1.1 整式

(1) 単項式と多項式

$5, a, 3a^2, -2ax^3$ のように、数や文字およびそれら掛け合わせてできる式を**単項式**という。単項式において、数の部分をその単項式の**係数**といい、かけ合わせた文字の個数をその単項式の**次数**という。

$5, -2$ など、数だけの単項式の次数は 0 とする。ただし、 0 の次数は考えない。

2 種類以上の文字を含む単項式において、特定の文字に着目して係数や次数を考えることがある。この場合、他の文字は数と同様に扱う。

例えば、 $-2ax^3$ について、次数は 4 で、係数は -2 であるが、 x に着目すると、次数は 3 で、係数は $-2a$ となり、 a に着目すると、次数は 1 で、係数は $-2x^3$ となる。

$5x^3 + (-2x^2) + 3$ のようにいくつかの単項式の和として表される式を**多項式**といい、各単項式をこの多項式の**項**という。

普通、 $5x^3 + (-2x^2) + 3$ は $5x^3 - 2x^2 + 3$ と書く。

単項式と多項式を合わせて**整式**という。

☞ 単項式を項が 1 つである多項式と考え、多項式を整式と同じ意味に用いることがある。

整式の項の中で、文字の部分が同じである項を**同類項**という。整式は、同類項を 1 つにまとめて整理することができる。

同類項をまとめて整理した整式において、最も次数の高い項の次数を、この整式の**次数**といい、次数が n の整式を n 次式という。

例えば、 $5x^3 - 2x^2 + 3$ は 3 次式である。

2 種類以上の文字を含む整式においても、特定の文字に着目して、他の文字は数と同様に扱うことがある。

整式において、着目した文字を含まない項を**定数項**という。

例えば、 $ax^2 + bx + c$ は、 x に着目すれば 2 次式であり、係数は a, b であり、 c は定数項である。

整式を，ある文字に着目して項の次数が高い方から順に並べて整理することを降べきの順に整理するといい，次数が低い方から順に並べて整理することを昇べきの順に整理するという。

例えば， $2ax^2 - 3a^2 + 5x^3$ を
 x について降べきの順に整理すると， $5x^3 + 2ax^2 - 3a^2$
 a について降べきの順に整理すると， $-3a^2 + 2x^2a + 5x^3$ となる。

(2) 整式の加法と減法および乗法

整式の加法，減法，乗法は，数の場合と同様に，次の法則を基本として行われる。

交換法則 $A + B = B + A$ ， $AB = BA$

結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$ ， $(AB)C = A(BC)$

分配法則 $A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$

① 整式の加法・減法

整式の和と差は，同類項をまとめることによって，それぞれ次のように計算する。

例1

(1) x についての整式 A ， B が $2A + B = 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1$ ， $A - B = -x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ を満たすとき，2つの整式 A ， B を求めよ。

(2) 整式 $A = x^2 - 2xy + 3y^2$ ， $B = 2x^2 + 3y^2$ ， $C = x^2 - 2xy$ について $2(A - B) - \{C - (3A - B)\}$ を計算せよ。

解説

$$(1) 2A + B = 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$A - B = -x^3 - 4x^2 + 5x + 1 \cdots \textcircled{2}$$

①+②より

$$3A = 3x^3 + 3x^2 + 9x$$

$$\therefore A = x^3 + x^2 + 3x$$

①-②×2より

$$3B = 6x^3 + 15x^2 - 6x - 3$$

$$\therefore B = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 2(A - B) - \{C - (3A - B)\} = 5A - 3B - C \\
 & = 5(x^2 - 2xy + 3y^2) - 3(2x^2 + 3y^2) - (x^2 - 2xy) \\
 & = -2x^2 - 8xy + 6y^2
 \end{aligned}$$

② 整式の乗法

文字 a をいくつか掛けたものを a の累乗という。

a を n 個掛けて累乗を a の n 乗といい、 a^n とかく。また、 a^n における n を a^n の指数という。一般に、次の指数法則が成り立つ。

指数法則

m, n は正の整数とする

$$1. a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3. (ab)^n = a^n b^n$$

例2

$(-2a^2b^3c)^3(-3abc^3)^2$ を展開せよ。

解説

$$\begin{aligned}
 (-2a^2b^3c)^3(-3abc^3)^2 &= -8a^6b^9c^3 \times 9a^2b^2c^6 \\
 &= -72a^8b^{11}c^9
 \end{aligned}$$

整式の積は、分配法則を用いて、計算する。いくつかの整式の積の形をした式において、積を計算して1つの整式に表すことを、その式を展開するという。

例3

(1) $(3x+1)(4x^2-3x-1)$ を展開せよ。

(2) $(2x^2-x+1)(x^2+3x-3)$ を展開せよ。

(3) $(x+5)(x+6)(x+7)$ を展開せよ。

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (3x+1)(4x^2-3x-1) = 3x(4x^2-3x-1) + 4x^2-3x-1 \\
 & = 12x^3-9x^2-3x+4x^2-3x-1 \\
 & = 12x^3-5x^2-6x-1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) (2x^2 - x + 1)(x^2 + 3x - 3) &= 2x^2(x^2 + 3x - 3) - x(x^2 + 3x - 3) + x^2 + 3x - 3 \\
 &= 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - x^3 - 3x^2 + 3x + x^2 + 3x - 3 \\
 &= 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x - 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) (x + 5)(x + 6)(x + 7) &= (x^2 + 11x + 30)(x + 7) \\
 &= x^3 + 18x^2 + 107x + 210
 \end{aligned}$$

例4

$(x^3 + 3x^2 + 2x + 7)(x^3 + 2x^2 - x + 1)$ を展開すると、 x^5 の係数は ^ア,
 x^3 の係数は ^イ となる.

解説

それぞれ x^5 と x^3 となる項の係数に注目して

$$(\text{ア}) 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

$$(\text{イ}) 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 9$$

③ 展開の公式

交換法則，結合法則，分配法則からいろいろな展開の公式が得られ，それらは，式を展開するときによく利用される。

次の展開の公式は，既に学んだものである。

展開の公式1

$$1. (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$2. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$3. (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$4. (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

さらに次の2つの公式が追加される。

展開の公式2

$$5. (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$6. (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$\begin{aligned}
5. (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-b)^3 &= \{a+(-b)\}^3 \\
&= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3 \quad (\text{上の公式を利用}) \\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. (a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) \\
&= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3 \\
&= a^3+b^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= \{a+(-b)\}\{a^2-a(-b)+(-b)^2\} \\
&= a^3+(-b)^3 \quad (\text{上の公式を利用}) \\
&= a^3-b^3
\end{aligned}$$

例5

(1) $(2x+3)^3$ を展開せよ.

(2) $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3$ を展開せよ.

(3) $(x-2)(x+1)(x^2+2x+4)(x^2-x+1)$ を展開して同類項をまとめたとき、項の個数は⁷ で、 x^3 の係数は¹ である。

解説

$$\begin{aligned}
(1) (2x+3)^3 &= (2x)^3+3(2x)^2 \cdot 3+3(2x) \cdot 3^2+3^3 \\
&= 8x^3+36x^2+54x+27
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) (a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3 &= \{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\}^3 \\
&= \{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^3 \\
&= (a^4-b^4)^3 \\
&= a^{12}-3a^8b^4+3a^4b^8-b^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) (x-2)(x+1)(x^2+2x+4)(x^2-x+1) &= \{(x-2)(x^2+2x+4)\}\{(x+1)(x^2-x+1)\} \\
&= (x^3-8)(x^3+1)
\end{aligned}$$

$$=x^6-7x^3-8$$

よって、項の個数は3で、 x^3 の係数は -7 である

④ 式の展開の工夫

展開する式の形に応じて、適当な工夫をした上で展開の公式を利用すると見通しよく計算できる場合がある。また、積の順序をかえる、共通に現れる式を1つにまとめるなどすると、展開の公式が利用できる場合がある。

例6

- (1) $(a+b+c)^2$ を展開せよ。
- (2) $(2x-y+3)^2$ を展開せよ。
- (3) $(a-b+c)^2-(a-b-c)^2$ を展開せよ。
- (4) $(a-b+c)(a-b-c)$ を展開せよ。
- (5) $(x^2+3x+2)(x^2-3x+2)$ を展開せよ。
- (6) 次の式を展開せよ。

$$(a+b+c)(b+c-a)+(c+a-b)(a+b-c)$$

解説

$$(1) (a+b+c)^2$$

$A=a+b$ とおくと

$$\begin{aligned} &= (A+c)^2 \\ &= A^2+2Ac+c^2 \\ &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 \\ &= a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \end{aligned}$$

注 よく使うので、公式として覚えておいた方がよい。

$$\begin{aligned} (2) (2x-y+3)^2 &= (2x)^2+(-y)^2+3^2+2\cdot 2x\cdot (-y)+2\cdot (-y)\cdot 3+2\cdot 3\cdot (2x) \\ &= 4x^2+y^2-4xy+12x-6y+9 \end{aligned}$$

$$(3) (a-b+c)^2-(a-b-c)^2$$

$A=a-b$ とおくと

$$\begin{aligned} &= (A+c)^2-(A-c)^2 \\ &= 4Ac \\ &= 4ca-4bc \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
 & (a-b+c)^2 - (a-b-c)^2 \\
 &= \{(a-b+c) + (a-b-c)\} \{(a-b+c) - (a-b-c)\} \\
 &= (2a-2b) \cdot 2c = 4ac - 4bc
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & (a-b+c)(a-b-c) = (a-b)^2 - c^2 \\
 &= a^2 - 2ab + b^2 - c^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & (x^2+3x+2)(x^2-3x+2) = \{(x^2+2) + 3x\} \{(x^2+2) - 3x\} \\
 &= (x^2+2)^2 - (3x)^2 \\
 &= x^4 - 5x^2 + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & (\text{与式}) = (b+c+a)(b+c-a) + \{a-(b-c)\} \{a+(b-c)\} \\
 &= \{(b+c)^2 - a^2\} + \{a^2 - (b-c)^2\} \\
 &= (b+c)^2 - (b-c)^2 \\
 &= (b^2 + 2bc + c^2) - (b^2 - 2bc + c^2) \\
 &= 4bc
 \end{aligned}$$

例7

- (1) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ を展開せよ。
 (2) $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$ を展開せよ。
 (3) $(a^6+a^3b^3+b^6)(a^2+ab+b^2)(a-b)$ を展開せよ。

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\
 &= \{(x^2+1) - \sqrt{2}x\} \{(x^2+1) + \sqrt{2}x\} \\
 &= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\
 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 \\
 &= x^4 + 1
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \\
 &= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) \\
 &= (x^4-1)(x^4+1) \\
 &= x^8 - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \text{ (与式)} &= (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2) \times (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) \\
&= \{(2x)^3+(3y)^3\}\{(2x)^3-(3y)^3\} \\
&= (2x)^6-(3y)^6 \\
&= 64x^6-729y^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \text{ } &(a^6+a^3b^3+b^6)(a^2+ab+b^2)(a-b) \\
&= (a^6+a^3b^3+b^6)(a^3-b^3) \\
&= \{(a^3)^2+a^3b^3+(b^3)^2\}(a^3-b^3) \\
&= (a^3)^3-(b^3)^3 \\
&= a^9-b^9
\end{aligned}$$

確認問題3

(1) $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$ を展開したとき, y^2z^2 の係数と x^2yz の係数の和を求めよ.

(2) $(a+b+c)^2-(b+c-a)^2+(c+a-b)^2-(a+b-c)^2$ を簡単にせよ.

(3) $(x+y+2z)^3-(y+2z-x)^3-(2z+x-y)^3-(x+y-2z)^3$ を展開せよ.

解説

$$\begin{aligned}
 (1) & (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \\
 &= \{(y+z)+x\}\{(y+z)-x\}\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\} \\
 &= \{(y+z)^2-x^2\}\{x^2-(y-z)^2\} \\
 &= -\{x^2-(y+z)^2\}\{x^2-(y-z)^2\} \\
 &= -\{x^4-\{(y+z)^2+(y-z)^2\}x^2+(y+z)^2(y-z)^2\} \\
 &= -\{x^4-(2y^2+2z^2)x^2+\{(y+z)(y-z)\}^2\} \\
 &= -\{x^4-2x^2y^2-2z^2x^2+(y^2-z^2)^2\} \\
 &= -\{x^4-2x^2y^2-2z^2x^2+y^4-2y^2z^2+z^4\} \\
 &= -x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2
 \end{aligned}$$

よって, y^2z^2 の係数と x^2yz の係数の和は $2+0=2$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (与式)} &= \{(a+b)+c\}^2-\{(a+b)-c\}^2+\{c+(a-b)\}^2-\{c-(a-b)\}^2 \\
 &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2-\{(a+b)^2-2(a+b)c+c^2\} \\
 &\quad +c^2+2(a-b)c+(a-b)^2-\{c^2-2(a-b)c+(a-b)^2\} \\
 &= 4(a+b)c+4(a-b)c \\
 &= 8ca
 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
 & (a+b+c)^2-(b+c-a)^2+(c+a-b)^2-(a+b-c)^2 \\
 &= \{(a+b+c)+(b+c-a)\}\{(a+b+c)-(b+c-a)\} \\
 &\quad +\{(c+a-b)+(a+b-c)\}\{(c+a-b)-(a+b-c)\} \\
 &= 2(b+c) \cdot 2a+2a \cdot 2(c-b) \\
 &= 4a\{(b+c)+(c-b)\} \\
 &= 8ca
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & (x+y+2z)^3-(y+2z-x)^3-(2z+x-y)^3-(x+y-2z)^3 \\
 &= \{x+(y+2z)\}^3+\{x-(y+2z)\}^3-\{\{x+(y-2z)\}^3+\{x-(y-2z)\}^3\} \\
 &= 2x^3+6x(y+2z)^2-\{2x^3+6x(y-2z)^2\} \\
 &= 6x\{(y+2z)^2-(y-2z)^2\} \\
 &= 6x \cdot 8yz = 48xyz
 \end{aligned}$$