$\boxed{1}$ [2008 同志社大]

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$b_1=2$，$b_{n+1}=2b_n+n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3)　$c_1=2$，$c_{n+1}=2c_n+\dfrac{1}{2}n(n-1)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\boxed{2}$ [神戸大]

$a_1=0, a_{n+1}=3a_n+2^n-1\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$\boxed{3}$ [2021 高知大]

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，および，すべての自然数 m に対して，$a_{2m}=a_{2m-1}+1$，$a_{2m+1}=2a_{2m}$ を満たすとする。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [2001 山口大]

$a_1=2$，$a_2=4$，$2a_{n+2}=a_n+3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$\boxed{5}$ [2022 徳島大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1,\ a_{2n}=3a_{2n-1},\ a_{2n+1}=a_{2n}+3^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　n を自然数とするとき，a_{2n} および a_{2n-1} をそれぞれ n の式で表せ。

(3)　m を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{2m}a_n$ を求めよ。

$\boxed{6}$ [2016 同志社大]

数列 $\{a_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は $m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し

$n=3m$　　のとき　$a_{n+1}=a_n+1$

$n=3m+1$ のとき　$a_{n+1}=2a_n$

$n=3m+2$ のとき　$a_{n+1}=a_n-1$

を満たす。$a_0=0$，$a_1=1$ として，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 をそれぞれ求めよ。

(2)　a_{3m+4} を a_{3m+1} を用いて表せ。

(3)　a_{3m+1} を m を用いて表せ。

(4)　a_{3m+2} と a_{3m+3} を m を用いてそれぞれ表せ。

(5)　$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ とする。$n=3m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のとき S_n を m を用いて表せ。

$\boxed{7}$ [東京医科歯科大]

(1) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$a_1=\dfrac{1}{2},\ a_2=\dfrac{7}{4},\ a_n=\dfrac{5}{2}a_{n-1}-a_{n-2}\ (n=3, 4, 5, \cdots\cdots)$

(2) 次のように定義される数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$b_1=2,\ b_2=\dfrac{5}{2},\ b_3=\dfrac{17}{4},\ b_n=\dfrac{7}{2}b_{n-1}-\dfrac{7}{2}b_{n-2}+b_{n-3}\ (n=4, 5, 6, \cdots\cdots)$

$\boxed{8}$ [2021 関西大]

n を自然数として，数列 $\{a_n\}$ を $a_{n+3}-4a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0$ によって定める。

(1)　3 次方程式 $x^3-4x^2+5x-2=0$ の 3 つの実数解を α，β，γ $(\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ とするとき，

$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=$ $^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ である。

(2)　(1) で求めた β，γ に対し，$b_n=a_{n+1}-\beta a_n$，$c_n=b_{n+1}-\gamma b_n$ とおく。このとき，

b_{n+2} は b_{n+1} と b_n を用いて $b_{n+2}=$ $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ と表すことができ，c_{n+1} は c_n を用いて

$c_{n+1}=$ $^{\text{ウ}}\boxed{\quad}$ と表すことができる。

(3)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$ とする。

(2) において，$c_1=$ $^{\text{エ}}\boxed{\quad}$ である。また，b_n を n を用いて表すと $b_n=$ $^{\text{オ}}\boxed{\quad}$ である。さらに，a_n を n を用いて表すと $a_n=$ $^{\text{カ}}\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{9}$ [(1) 東北大　(2) 関西学院大]

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2,\ a_2=0,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義されているとする．このとき，一般項 a_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=0,\ a_2=1,\ a_n+a_{n-1}-2a_{n-2}=2^{n-2}\ (n \geqq 3)$ によって定められているとする．このとき，一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{10}$ [2016 横浜市立大]

n を自然数とする。漸化式 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-6n=0$，$a_1=1$，$a_2=1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{11}$ [宮城教育大]

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}-2^n\ (n \geqq 2)$ によって定義されている．

(1) $a_{n+1}-a_n$ を n を用いて表せ．

(2) a_n を n を用いて表せ．

$\boxed{12}$ [室蘭工業大]

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0,\ a_2=4,\ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+3^n\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たしている．さらに，$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおく．

(1) $c_n=b_n-3^n$ とおくとき，c_{n+1} を c_n をを用いて表せ．また，数列 $\{c_n\}$ および数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $d_n=\dfrac{a_n}{3^{n-1}}$ とおくとき，d_{n+1} を d_n を用いて表せ．また，数列 $\{d_n\}$ および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{13}$[1998 島根大]

正の整数 n に対して，整数 a_n, b_n を $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ により定める．

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ．

(2) $c_n=a_n-b_n\sqrt{3}$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{14}$[2000 岡山理科大]

自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を，$(3+\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$ により定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ．

(2) $c_n=a_n-b_n\sqrt{5}$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{15}$[2011 信州大]

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次のように定められている：

$$a_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ b_1=\frac{1}{2}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$b_{n+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) ${a_n}^2+{b_n}^2$ を求めよ。

(2) a_{n+3} と a_n の関係式および b_{n+3} と b_n の関係式をそれぞれ求めよ。

(3) a_n, b_n を求めよ。

$\boxed{16}$[2022 福井大]

次の条件によって定められる 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がある。

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_{n+1}=ax_n-by_n \\ y_{n+1}=bx_n+ay_n \end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

ただし，a, b は，$a^2+b^2=1$ を満たす実数とする。

(1) すべての自然数 n について，${x_n}^2+{y_n}^2=1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $x_4=x_1$ が成り立つ実数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた実数の組 $(a,\ b)$ のうち $b>0$ を満たす $(a,\ b)$ に対し，$\{y_n\}$ の第 1234 項 y_{1234} を求めよ。

$\boxed{17}$[2020 鹿児島大]

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を，初項 $a_1=0$, $b_1=1$, および次の漸化式で定める。

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+\sqrt{3}b_n \\ b_{n+1}=-\sqrt{3}a_n+b_n \end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4 を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+3}=-8a_n$, $b_{n+3}=-8b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{9}a_n$ を求めよ。

(4) 次で定まる T の値を求めよ。

$$T=\frac{1}{\sqrt{3}}b_{2020}+\sum_{n=1}^{2020}a_n$$

$\boxed{18}$[2015 県立広島大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=-1,\ a_{n+1}=\frac{5a_n+9}{-a_n+11}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　$a_n<3$ を示せ。

(4)　$a_n<a_{n+1}$ を示せ。

(5)　a_n が自然数となる n をすべて求めよ。

$\boxed{19}$[2011 三重大]

c を定数として数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=c+1,\ a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。また，一般項 a_n の形を推定し，その推定が正しいことを証明せよ。

(2)　$c=324$ のとき，a_n の値が自然数となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{20}$[埼玉大]

実数 a を超えない最大の整数を記号 $[a]$ で表すことにする．数列 $\{a_n\}$ を

$a_1=-4,\ a_2=2,\ a_n=\left[\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}+3}{2}\right]\ (n\geqq 3)$ によって定める．

(1) $a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$ を求めよ．

(2) $n\geqq 7$ のとき a_n を推定し，その推定した結果が正しいことを証明せよ．

$\boxed{21}$[大阪市立大]

数列 $\{a_n\}$ は次の関係式(i),(ii)を満たしている．

(i) $a_1=1$

(ii) $a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots\cdots+a_na_1)\ (n=1,2,\cdots\cdots)$

一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{22}$[2008 青山学院大]

関数 $f(x)=x^2-2$ を用いて数列を次のように定める。まず，$a_0=2$ として $f(x)$ の $x=a_0$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_1 とする。このとき $a_1=$ ア $\boxed{}$ である。以下同様にして，$x=a_n$ における $f(x)$ の接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする。$f(x)$ の $x=a_n$ における接線の方程式は $y=$ イ $\boxed{}$ と表される。これから，a_{n+1} は a_n を用いて $a_{n+1}=$ ウ $\boxed{}$ と表される。特に $a_2=$ エ $\boxed{}$ である。

$\boxed{23}$[神戸大]

$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}<a_{n+1}<a_n\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ を示せ．

(2) $a_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ を示せ．

(3) $|a_5-\sqrt{2}|<10^{-10}$ を示せ．ただし，$1.41<\sqrt{2}<1.42$ を用いてよい．

$\boxed{24}$[2006 兵庫県立大]

関数 $y=f(x)=x^2-b\ (b>0)$ が定める放物線を C とし，数列 a_1，a_2，$\cdots\cdots$ を次のように定める。初項 a_1 は $a_1>\sqrt{b}$ を満たし，a_n に対して，C 上の点 $\mathrm{A}_n(a_n,\ f(a_n))$ における C の接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする。

(1)　$a_{n+1}\ (n\geqq 1)$ を a_n を用いて表せ。

(2)　すべての自然数 n に対して，不等式 $0<a_{n+1}-\sqrt{b}<\dfrac{1}{2\sqrt{b}}(a_n-\sqrt{b})^2$ が成り立つことを示せ。

(3)　$b=26$，$a_1=6$ として，a_3 と $\sqrt{26}$ の差は $\dfrac{1}{10^3}$ 未満であることを示せ。

$\boxed{25}$ [2011 明治学院大]

数列 $\{a_n\}$ が次の 2 つの条件を満たしている。

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき，a_2，a_3，$\sum_{k=1}^{100} a_k$ を求めよ。

$\boxed{26}$ [2019 岡山大]

a，b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ x_2=b,\ x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定める。

(1)　x_6，x_7 を a，b を用いて表せ。

(2)　$a=2$ とする。x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ。

$\boxed{27}$ [2014 芝浦工業大]

条件 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

このとき $a_5=$ $^{ア}\boxed{}$ であり，$a_{2014}=$ $^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{28}$ [1997 早稲田大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_{97}=97,\ a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$で定めるとき，a_1 の値を求めよ．

$\boxed{29}$ [2019 岡山大]

a，b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を $x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。

(1)　x_6，x_7 を a，b を用いて表せ。

(2)　x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ がすべて自然数になるような a，b の組をすべて求めよ。

$\boxed{30}$ [香川大]

定数 a に対して，漸化式を用いて次のように数列 $\{a_n\}$ を定義する．

$$a_1=a,\ a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n<1 \text{ のとき})\\ a_n-1 & (a_n\geqq 1 \text{ のとき})\end{cases}\quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

このとき，

(1) $a=\dfrac{1}{9}$ のときの a_{1000} の値，および $a=\dfrac{1}{12}$ のときの a_{1000} の値をそれぞれ求めよ．

(2) $a=\dfrac{1}{12}$ のとき，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{1000}$ を求めよ．

(3) $a=\dfrac{1}{12}$ のとき，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\leqq 100$ をみたす最大の自然数 n を求めよ．

$\boxed{31}$ [2000 東京水産大]

数列 $\{a_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は次の性質 (A)，(B) を満たすとする．

(A)　$a_0=4.2$

(B)　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，$a_k<4.5$ ならば $a_{k+1}=a_k+0.5$，
$4.5\leqq a_k$ ならば $a_{k+1}=0.9a_k$

(1)　a_1，a_2 を求めよ．

(2)　n が奇数ならば $4.5<a_n<5$ が成り立ち，n が偶数ならば $4<a_n<4.5$ が成り立つことを示せ．

(3)　すべての n に対して $a_n<a_{n+2}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{32}$ [2008 早稲田大]

実数 a は $0<a<1$ を満たす。数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

(i)　$a_1=a$

(ii)　$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ に対しては，

$$a_{n-1}\leqq 1 \text{ のとき}\quad a_n=\frac{1}{a_{n-1}},\qquad a_{n-1}>1 \text{ のとき}\quad a_n=a_{n-1}-1$$

(1)　$a=\sqrt{2}-1$ のとき，a_{125} の値を求めよ。

(2)　$a_1=a_6$ となるような a の値をすべて求めよ。

$\boxed{33}$ [2012 早稲田大]

初項を $a_0 \geqq 0$ とし，以下の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}_{n=0,\ 1,\ \ldots\ldots}$ を考える。

$$a_{n+1}=a_n-\left[\sqrt{a_n}\right]\quad(n\geqq 0)$$

ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1)　$a_0=24$ とする。このとき，$a_n=0$ となる最小の n を求めよ。

(2)　m を 2 以上の整数とし，$a_0=m^2$ とする。このとき，$1\leqq j\leqq m$ を満たす j に対して a_{2j-1}，a_{2j} を j と m で表せ。

(3)　m を 2 以上の整数，p を $1\leqq p\leqq m-1$ を満たす整数とし，$a_0=m^2-p$ とする。このとき，$a_k=(m-p)^2$ となる k を求めよ。さらに，$a_n=0$ となる最小の n を求めよ。

$\boxed{34}$ [2001 甲南大]

a を実数とする．数列 $\{a_n\}$ が，次のように定められている．

$$a_1=a,\ a_{n+1}=|-2a_n+3|\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$a=4$ のとき，a_1，a_2，a_3 および a_4 の値を求めよ．

(2)　$a>3$ のとき，一般項 a_n を a と n の式で表せ．

(3)　$0\leqq a\leqq 3$ のとき，任意の正の整数 n に対して $0\leqq a_n\leqq 3$ となることを示せ．

$\boxed{35}$ [2018 慶応義塾大]

実数 x に対して，$[x]$ は x 以下の最大の整数とする。数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\left[\sqrt{n+1}\right]\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$b_1=1,\ b_{n+1}=b_n+(-1)^n\left[\sqrt{n+1}\right]\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義すると

(1)　$a_{10}=\ ^{ア}\boxed{}$，$b_{10}=\ ^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　$a_n\geqq 100$ となるのは $n\geqq\ ^{ウ}\boxed{}$ のときである。

(3)　$b_n=5$ となる最初の項は $n=\ ^{エ}\boxed{}$ のときである。

(4)　一般に，$m=\left[\sqrt{n}\right]$ とすると

$$a_n=\frac{^{オ}\boxed{}mn+{}^{カ}\boxed{}m^{^{キ}\boxed{}}+{}^{ク}\boxed{}m^2+{}^{ケ}\boxed{}m}{^{コ}\boxed{}}$$

となる。

$\boxed{36}$ [2001 福井大]

数列 $\{a_n\}$ について，$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つとする．

(1)　すべての n について，$0<a_n<2$ が成り立つことを，n に関する数学的帰納法で示せ．

(2)　$a_n=2\cos\theta_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおくとき，θ_1 を求め，θ_{n+1} を θ_n を用いて表せ．ただし，$0^\circ<\theta_n<90^\circ$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする．

(3)　一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{37}$ [和歌山大]

次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=\sin^2\theta,\ a_{n+1}=4a_n(1-a_n)\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

ただし，θ は $0^\circ<\theta<90^\circ$ をみたす定数である．このとき，

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\sin^2(2^{n-1}\theta)$ で表されることを数学的帰納法によって証明せよ．

(2) a_n が n によらず一定になるように，θ の値を定めよ．

$\boxed{38}$ [中央大]

1 つの円に n 本の弦を，どの 2 本も円の内部で交わり，どの 3 本も同じ点を通ることがないように引く．円の内部が，これらの弦によって分けられる部分の個数を D_n とする．このとき， $D_3=\boxed{\quad}$, $D_4=\boxed{\quad}$ である．

一般に D_{n-1} と D_n の間の関係式は $D_n=\boxed{\quad}D_{n-1}+\boxed{\quad}$ であるから， $D_n=\boxed{\quad}$ となる．

また， D_n 個の部分のうち多角形であるものの個数を d_n とする． n が 4 以上のとき， d_{n-1} と d_n の間の関係式は $d_n=\boxed{\quad}d_{n-1}+\boxed{\quad}$ であるから， $d_n=\boxed{\quad}$ となる

$\boxed{39}$ [慶応大]

(1) 直線上にいずれの 2 点も重ならないように，順に点をおいていく． $n\,(n\geqq 1)$ 個の点をおいたとき，直線は $\boxed{\quad}$ 個の有限の長さの区間と $\boxed{\quad}$}個の無限の長さの区間に分けられる．

(2) 平面上に，いずれの 3 直線も 1 つの三角形を決定するように，順に，直線をおいていく． $n\,(n\geqq 1)$ 本の直線をおいたとき，平面は $\boxed{\quad}$ 個の有限の面積をもつ部分と，$\boxed{\quad}$ 個の無限の面積をもつ部分に分けられる．

(3) 空間内に，いずれの 4 平面も 1 つの四面体を決定するように，順に，平面をおいていく． $n\,(n\geqq 1)$ 個の平面をおいたとき，空間は $\boxed{\quad}$ 個の有限の体積をもつ部分と，$\boxed{\quad}$ 個の無限の体積をもつ部分に分けられる．

$\boxed{40}$ [2020 立命館大]

ある水槽に水を入れておくと，1 日 (24時間) 経つと水の容積が 10 % 減少する。その水槽が空の時，1 回目に 10 リットルの水を入れ，その後，1 日経つ毎に p リットル $(0<p<10)$ の水をさらに入れるものとする。a_n は n 回目に水を入れた直後の水槽の水の容積 (単位はリットル) とする。

数列 $\{a_n\}$ において，$n\geqq 1$ のとき a_{n+1} と a_n の間には，p を用いて $a_{n+1}={}^{ア}\boxed{\quad}$ となる関係式が成り立つ。したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は n と p を用いて，

$a_n=10\left\{{}^{イ}\boxed{\quad}\right\}p+10\,{}^{ウ}\boxed{\quad}$ となる。

よって，毎回水を入れた直後の水の容積が常に一定となるのは，$p={}^{エ}\boxed{\quad}$ のときである。

$\boxed{41}$ [2012 静岡大]

ある工場では，昼間にタンクの水を使用し，夜間に水を補給する。毎日，朝の水量のうち 10% が使用され，その日の夜に 200 リットルが補給される。操業 1 日目の朝の始業前には，タンクの水量が 8000 リットルであった。

(1)　3 日目の朝の始業前のタンクの水量を求めよ。

(2)　n 日目の朝の始業前のタンクの水量を a_n リットルとするとき，a_{n+1} を a_n で表せ。

(3)　朝の始業前のタンクの水量がはじめて 2400 リットル未満になるのは，何日目の朝か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\boxed{42}$ [1997 東京水産大]

ある会社が，プロ野球のハチロー選手に対して，公式戦で二塁打を 1 本打つとそのたびに 10 万円の賞金を出すこととした．そこで，ハチロー選手は

(A)　1 本目については賞金の 40%

(B)　n 本目 $(n\geqq 2)$ については，$n-1$ 本目までの賞金総額のうち手元に残った金額と n 本目の賞金 10 万円との合計の 40 %

を慈善事業への寄付金にあてることとした．ハチロー選手は手元に残った賞金には手をつけないものとする．

(1)　n 本目までの二塁打で寄付金の合計額はいくらになるかを求めよ．

(2)　寄付金の合計額が初めて 100 万円を超えるときの二塁打の本数を求めよ．

$\boxed{43}$［2020 新潟大］

n を正の整数とする。3 種類の数字 1，2，3 を並べて，各位の数が 1，2，3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。また，各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とする。

(1)　n を 2 以上の整数とするとき，$\begin{cases} x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} \\ y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1} \end{cases}$ を満たす定数 a，b，c，d の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$y_n + x_n$，$y_n - x_n$ および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(3)　z_n の値を n を用いて表せ。

$\boxed{44}$［関西学院大］

0, 1, 2, 3 の 4 種類の数字を用いて n 桁 ($n \geqq 1$) の正の整数をつくるとき，数字 1 を偶数回含むものが a_n 個，奇数回含むものが b_n 個できたとする．ただし， 1 を含まないものも 1 を偶数回含むものとする．

(1) a_n と b_n の間にはどんな関係があるか．

(2) a_n, b_n を a_{n-1} と b_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n を求めよ．

$\boxed{45}$［2024 早稲田大］

n を自然数とし，数 1，2，4 を重複を許して n 個並べてできる n 桁の自然数全体を考える。そのうちで 3 の倍数となるものの個数を a_n，3 で割ると 1 余るものの個数を b_n，3 で割ると 2 余るものの個数を c_n とする。

(1)　a_{n+1} を b_n，c_n を用いて表せ。同様に，b_{n+1} を a_n，c_n を用いて，c_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2)　a_{n+2} を n と c_n を用いて表せ。

(3)　a_{n+6} を n と a_n を用いて表せ。

(4)　a_{6m+1} ($m = 0$，1，2，……) を m を用いて表せ。

$\boxed{46}$［2020 静岡大］

自然数 n に対して，A_n，B_n を数直線上の点とし，点 A_n の座標を a_n，点 B_n の座標を b_n で表す。ただし，$a_1 = 0$，$b_1 = 1$ とし，点 A_{n+1} を点 A_n と点 B_n の中点，点 B_{n+1} を線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ を 4：1 に外分する点とする。

(1)　a_2，b_2，a_3，b_3 をそれぞれ求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(3)　b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(4)　$b_n - a_n$ を n を用いて表せ。

(5)　a_n を n を用いて表せ。

$\boxed{47}$［2016 東京電機大］

数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ を次のように定める。ただし数直線上で座標が a_n の点を A_n，座標が b_n の点を B_n とおく。

$a_1 = 0$，$b_1 = 1$，

$a_{n+1} =$「線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ を 1：2 に内分した点の座標」，

$b_{n+1} =$「線分 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$ を 1：2 に内分した点の座標」　とおく。

(1)　$n \geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n と b_n で表せ。

(2)　$c_n = 4a_n + 3b_n$ とおくとき，c_{n+1} を c_n で表せ。更にそれを利用して，一般項 c_n を求めよ。

(3)　$d_n = a_n - b_n$ とおくとき，d_{n+1} を d_n で表せ。更にそれを利用して，一般項 d_n を求めよ。

(4)　(2) と (3) を利用して，一般項 a_n，b_n を求めよ。

$\boxed{48}$［1996 熊本県立大］

自然数 n に対して，数直線上の点 P_n の座標を x_n とし，点 P_0，P_1 の座標をそれぞれ $x_0 = 0$，$x_1 = 1$ とする．線分 $\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}$ ($n = 2, 3, \cdots\cdots$) を 3：1 の比に外分する点を P_n とする．

(1)　点 P_n の座標 x_n を n の式で表せ．

(2)　$|x_n - 2| \leqq 10^{-8}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$ とする．

$\boxed{49}$［2016 東北大］

あるウイルスの感染拡大について次の仮定で試算を行う。このウイルスの感染者は感染してから1日の潜伏期間をおいて，2日後から毎日2人の未感染者にこのウイルスを感染させるとする。新たな感染者1人が感染源となった n 日後の感染者数を a_n 人とする。たとえば，1日後は感染者は増えず $a_1=1$ で，2日後は2人増えて $a_2=3$ となる。

(1)　a_{n+2}，a_{n+1}，a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

(3)　感染者数が初めて1万人を超えるのは何日後か求めよ。

$\boxed{50}$［東京農工大］

厚さがそれぞれ 1cm, 2cm, 2cm の白，赤，青の円盤がある．これを積み重ねて円柱を作る．円柱の高さが n cmになるような積み重ねの場合の数を f_n とする．ただし各円盤は十分たくさんあるものとする．このとき，

(1) f_1 および f_2 を求めよ．

(2) $n\geqq 3$ とする． f_n を f_{n-1} と f_{n-2} を用いて表せ．

(3) $g_n=f_{n+1}-2f_n$ とおくとき， g_n を n を用いて表せ．

(4) f_n を n を用いて表せ．

$\boxed{51}$［2020 兵庫県立大］

0，1からなる長さ $n\,(n\geqq 1)$ の例のうち，0が連続する並びを含まない列の集合を P_n，その要素の個数を a_n とする。例えば $n=4$ のとき，長さ4の列 0101 や 1111 は P_4 に含まれるが，1001 は P_4 に含まれない。また，$n=1$ のとき $P_1=\{0,\ 1\}$ であるため $a_1=2$ である。

(1)　P_2，P_3，a_2，a_3 をそれぞれ求めよ。

(2)　$n\geqq 1$ のとき，a_{n+2} を a_{n+1}，a_n を用いて表せ。

(3)　2次方程式 $x^2-x-1=0$ の2つの解を α，$\beta\,(\alpha>\beta)$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})$ で与えられることを示せ。

$\boxed{52}$［2020 大分大］

階段を上るとき，一度に上ることができる段数は1段または2段のみであるとする。

(1)　ちょうど10段上る方法は全部で何通りあるか答えよ。

(2)　n を正の整数とする。ちょうど n 段上る方法は全部で何通りあるか答えよ。

$\boxed{53}$［2019 北海道大］

n を自然数とする。数列 2，1，2，1，1 のように各項が1または2の有限数列 (項の個数が有限である数列) を考える。各項が1または2の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。例えば，$n=1$ のときは，1項からなる数列1のみである。したがって，$s_1=1$ となる。$n=2$ のときは，1項からなる数列2と2項からなる数列1，1の2つである。したがって，$s_2=2$ となる。

(1)　s_3 を求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ。

(3)　3以上のすべての n に対して $s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α，β の組 $(\alpha,\ \beta)$ を1組求めよ。

(4)　s_n を求めよ。

54 [2009 横浜国立大]

赤，青，黄の3色を用いて，横1列に並んだ n 個のマスを，隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける。ただし，使わない色があってもよい。両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし，両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする。

(1)　a_3，b_3，a_4，b_4 を求めよ。　　(2)　a_n，b_n $(n \geqq 3)$ を n の式で表せ。

55 [2018 大阪市立大]

n を自然数とする。赤色，黄色，青色の3種類のタイルがあり，すべて同じ大きさの正方形であるとする。赤色と黄色のタイルが隣り合わないように，左から右に横一列に n 枚並べるときの場合の数を a_n とする。このうち，n 枚目が赤色，黄色，青色である場合の数をそれぞれ b_n，c_n，d_n とする。

(1)　a_1，a_2 を求めよ。

(2)　b_{n+1}，c_{n+1}，d_{n+1} を b_n，c_n，d_n を用いて表せ。

(3)　a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ。

(4)　a_n を求めよ。

56 [上智大]

n を1以上の整数とし，2行 n 列のマス目に，次の条件を満たして石を置く場合の数を x_n 通りとする.

・1つのマスには高々1つの石を置く.

・上下左右斜めに隣り合うマスの両方には石を置かない.

そのうち，最右列に石を置く場合の数を a_n 通り，置かない場合の数を b_n 通りとすると，$x_n = a_n + b_n$, $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ である．$n \geqq 2$ のとき，

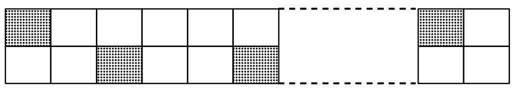
(1) a_n, b_n を a_{n-1}, b_{n-1} を用いて表せ.

(2) $c_n = b_n + b_{n-1}$ とおくとき，c_n を求めよ.

(3) x_n を求めよ.

57 [2018 埼玉大]

n を自然数とする。白色または黒色の辺の長さ1の正方形のタイル $2n$ 枚を用いて，下図のように縦の長さ2，横の長さ n の長方形に敷き詰める。



このとき，次の条件を満たすように敷き詰めるものとする。

(条件)　どの2つの黒色のタイルも頂点を共有しない。

左上 (上段の左端) と左下 (下段の左端) のタイルがともに白色となるときの場合の数を a_n，左上が黒色で左下が白色となるときの場合の数を b_n，すべての場合の数を c_n とする。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(3)　$a_{n+1} + a_n$ を求めよ。また，$a_{n+1} - 2a_n$ を求めよ。

(4)　c_n を求めよ。