

高3数学 発展問題演習 演習 7. 数列

① [I. 2015 東北大 II. 2012 香川大]

I. $k \geq 2$ と n を自然数とする。 n が k 個の連続する自然数の和であるとき、すなわち、 $n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$ が成り立つような自然数 m が存在するとき、 n を k -連続和とよぶことにする。ただし、自然数とは1以上の整数のことである。

(1) n が k -連続和であることは、次の条件 (A), (B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n > k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。 $n = 2^f$ のとき、 n が k -連続和となるような自然数 $k \geq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし、 p を2でない素数とする。 $n = p^f$ のとき、 n が k -連続和となるような自然数 $k \geq 2$ の個数を求めよ。

II. n を2以上の整数とする。集合 $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ を2つの空集合ではない部分集合 A_n, B_n に分ける。すなわち、 $A_n \cup B_n = X_n$, $A_n \cap B_n = \emptyset$, $A_n \neq \emptyset$, $B_n \neq \emptyset$ である。 A_n に属する自然数の和を a_n , B_n に属する自然数の和を b_n とおく。例えば、 $n=5$ のとき、 X_5 を $A_5 = \{1, 2, 5\}$, $B_5 = \{3, 4\}$ と分ければ、 $a_5=8$, $b_5=7$ となる。

(1) n が4の倍数のとき、 $a_n = b_n$ となるように X_n を分けられることを示せ。

(2) $n+1$ が4の倍数のときも、 $a_n = b_n$ となるように X_n を分けられることを示せ。

(3) n も $n+1$ も4の倍数ではないとき、 $a_n = b_n$ となるようには X_n を分けられないことを示せ。

② [2010 山形大]

自然数全体から、偶数と 3^k (k は自然数) と表される数を取り出して、小さい方から順に並べたものを

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

とする。この数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $a_n = 1000$ となる n を求めよ。

(2) $a_n = 3^m$ (m は自然数) となる n を m を用いて表せ。

(3) 一般項 a_n を求めよ。

(4) 第 n 項までの和を S_n とする。自然数 m に対して $3^m \leq a_n < 3^{m+1}$ であるとき、 S_n を m, n を用いて表せ。

高3数学 発展問題演習 演習 7. 数列

3 [2005 同志社大]

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ は 1 から $2n-1$ までの n 個の相異なる奇数を並べ替えたものである。

- (1) $n=3$ のとき, $\sum_{k=1}^3 (a_k - 2k + 1)^2$ が最大となる数列 a_1, a_2, a_3 を求めよ。
- (2) $\sum_{k=1}^n a_k$ および $\sum_{k=1}^n a_k^2$ を求めよ。
- (3) $\sum_{k=1}^n (a_k - 2k + 1)^2 + \sum_{k=1}^n (a_k - 2n + 2k - 1)^2$ を n の式で表せ。
- (4) $\sum_{k=1}^n (a_k - 2k + 1)^2$ が最大となる数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の一般項は $a_k = 2n - 2k + 1$ ($k=1, 2, \dots, n$) で与えられることを示せ。

4 [2013 広島大]

1 から 100 までの整数のうち, 先頭が 1 で始まるものは 1, 10, 11, 12, $\dots$, 19, 100 の 12 個ある。

- (1) 1 から 1000 までの整数のうち, 先頭が 1 で始まるものの個数を求めよ。
- (2) n を 1 以上の整数とする。1 から 10^n までの整数のうち, 先頭が 1 で始まるものの個数を求めよ。また, それらの和を求めよ。
- (3) $n \geq 3$ ならば, (2) で求めた個数は 8 の倍数になることを示せ。

5 [2011 お茶の水女子大]

数列 $\{a_n\}$ を, 2 でも 3 でも 5 でも割り切れない自然数を小さい順に並べてできた数列とする。すなわち, $a_1=1, a_2=7, \dots$ である。

- (1) 第 10 項 a_{10} を求めよ。
- (2) 第 500 項 a_{500} を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $8k$ 項までの和を求めよ。ただし, k は自然数とする。

高3数学 発展問題演習 演習 7. 数列

6 [I. 2003 名古屋市立大 II. 2008 名古屋大]

I. x, y, z を整数とすると、 xy 平面上の点 (x, y) を 2 次元格子点、 xyz 空間内の点 (x, y, z) を 3 次元格子点という。また、 m, n を 0 以上の整数とする。

- (1) $x \geq 0, y \geq 0$ かつ $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y \leq m$ を満たす 2 次元格子点 (x, y) の総数を求めよ。
- (2) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ かつ $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y + z \leq n$ を満たす 3 次元格子点 (x, y, z) の総数を求めよ。

II. (1) $3x + 2y \leq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めよ。

- (2) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \leq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ。

7 [1999 京都大]

座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。 n は自然数であるとして、不等式 $x > 0, y > 0, \log_2 \frac{y}{x} \leq x \leq n$ を満たす格子点の個数を求めよ。

8 [1998 早稲田大]

正の整数 k に対して、 a_k を $\sqrt{k}$ にもっとも近い整数とする。

例えば $a_5 = 2, a_8 = 3, a_{20} = 4$ である。

- (1) $\sum_{k=1}^{12} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{12}$ を求めよ。
- (2) $\sum_{k=1}^{1998} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{1998}$ を求めよ。

9 [防衛大]

(1) n を負でない整数とすると、和 $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ を求めよ。

(2) $1\text{ g}, 3\text{ g}, 3^2\text{ g}, \cdots$ のおもりが 1 個ずつと、てんびんばかりがあるとき、任意の自然数 N に対して、 $N\text{ g}$ のものをこれらを用いてはかれることを示せ。

高3数学 発展問題演習 演習 7. 数列

10 [I . 2022 はこだて未来大 II . 2002 九州大]

I . 自然数 n に対して, 整式 $f_n(x)$ を次の条件によって定める。

$$f_1(x)=1, f_2(x)=x, f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)=0 \ (n=3, 4, 5, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f_5(x)$ を, 2 つの 2 次式の積の形に因数分解せよ。また, 方程式 $f_5(x)=0$ を解け。

(2) $0 < \theta < \pi$ のとき, $f(2\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \ (n=1, 2, 3, \dots)$ であることを証明せよ。

(3) $n \geq 2$ のとき, 方程式 $f_n(x)=0$ のすべての解を, n と三角関数を用いて表せ。

II . (1) n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2\cos\theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また, ある x の n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数, 奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また, $p_n(x)$ の 1 次項の係数を求めよ。

11 [2013 芝浦工業大]

関数 f は, 実数 x, y に対して $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}$ を満たすとする。この関数

が n 個の実数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に対し,

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)\} \dots\dots ①$$

を満たすことを証明したい。

(1) $n=4$ のとき, 不等式 ① が成り立つことを示せ。

(2) $n=2^m \ (m=1, 2, 3, \dots)$ のとき, 不等式 ① が成り立つことを示せ。

(3) $n=k \geq 2$ のとき不等式 ① が成り立つと仮定し, $n=k-1$ のとき不等式 ① が成り立つことを示せ。