

3.4 高次不等式

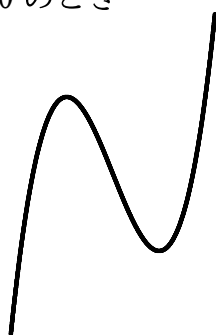
(1) 高次不等式

x の整式 $P(x)$ が n 次式のとき，方程式 $P(x) < 0, P(x) > 0$ を n 次不等式という。また，3 次以上の不等式を高次不等式という。解き方は 2 次不等式と同様に，グラフを利用して考えるとよい。3 次関数のグラフの形は以下のようなになる。なぜこのような形になるかは，微分を利用して求めることになるので，微分を学習するときに扱う。

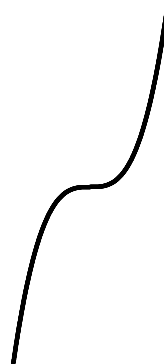
3次関数のグラフ

3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフは

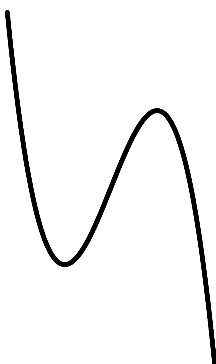
(1) $a > 0$ のとき



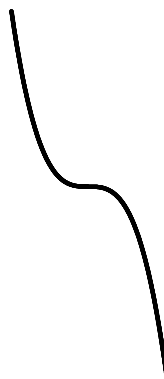
または



(2) $a < 0$ のとき



または



それぞれの場合において，どちらの形になるかは微分をしてみないと分からないが，3 次不等式を解く上では， $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の実数解の個数によってうまく使い分ければよい。

例1

(1) 不等式 $x^3 > 4x^2 + x - 4$ を解け。

(2) 不等式 $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \geq 0$ を解け。

(3) 不等式 $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 < 0$ を解け。

(4) 不等式 $(n-10)(20-n)(n-30) > 0$ を満たす自然数の数は $\overset{ア}{\boxed{\quad}}$ 個
であり、不等式 $n^3 - n^2 - 5n - 3 < 0$ を満たす自然数の数は $\overset{イ}{\boxed{\quad}}$ 個
である。

解説

(1) $x^3 > 4x^2 + x - 4$

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 > 0$$

($y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ とおくと、

$y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ かつ $y > 0$ となる

x の範囲を求めればよいから)

$$x^2(x-4) - (x-4) > 0$$

$$(x-4)(x^2-1) > 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-4) > 0$$

$$\therefore -1 < x < 1, \quad 4 < x$$

(2) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ とおくと

$$P(-1) = 0 \text{ より}$$

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 8) = (x+1)(x-2)(x-4)$$

よって

$$(x+1)(x-2)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2, \quad 4 \leq x$$

(3) $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ とおくと

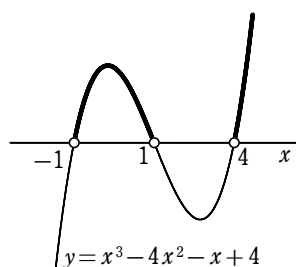
$$P(1) = 0 \text{ より}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 7x + 12) = (x-1)(x-3)(x-4)$$

よって

$$(x-1)(x-3)(x-4) < 0$$

$$\therefore x < 1, \quad 3 < x < 4$$



$$(4) (n-10)(20-n)(n-30) > 0$$

$$(n-10)(n-20)(n-30) < 0$$

n は自然数より, $1 \leq n < 10, 20 < n < 30$

よって, $\text{ }^{\circ}18$ 個

$$P(n) = n^3 - n^2 - 5n - 3 \text{ とおくと}$$

$$P(-1) = 0 \text{ より}$$

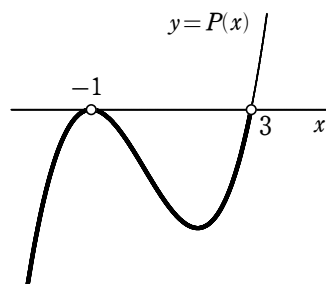
$$P(n) = (n+1)(n^2 - 2n - 3) = (n+1)^2(n-3)$$

よって

$$(n+1)^2(n-3) < 0$$

n は自然数より, $1 \leq n < 3$

よって, $\text{ }^{\circ}2$ 個



例2

(1) 不等式 $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 > 0$ を解け。

(2) 不等式 $(x^2 - 8x + 3)^2 - 4(x^2 - 8x + 3) + 3 \leq 0$ を満たす最大の整数を求めよ。

解説

$$(1) (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 > 0$$

$$(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) > 0$$

$$\{(x+2)(x-1)\}\{(x+4)(x-3)\} > 0$$

$$(x+4)(x+2)(x-1)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -4, -2 < x < 1, 3 < x$$

$f(x) = (x+4)(x+2)(x-1)(x-3)$ とすると,

$y = f(x)$ のグラフは, 右の図のようになる。

求める不等式の解は, $y > 0$ となる x の範囲である。

別解

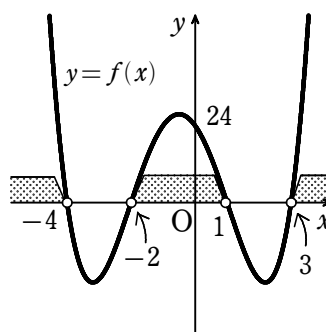
$$t = x^2 + x \text{ とおくと}$$

$$t = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

$$t^2 - 14t + 24 > 0$$

$$(t-2)(t-12) > 0$$

$$t \geq -\frac{1}{4} \text{ より } -\frac{1}{4} \leq t < 2, t > 12$$



$$-\frac{1}{4} \leq x^2 + x < 2, x^2 + x > 12$$

$$0 \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}, (x+4)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -4, -2 < x < 1, x > 3$$

(2) $x^2 - 8x + 3 = t$ とおくと

$$t^2 - 4t + 3 \leq 0$$

$$(t-1)(t-3) \leq 0$$

$$(x^2 - 8x + 2)(x^2 - 8x) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 4 - \sqrt{14}, 4 + \sqrt{14} \leq x \leq 8$$

よって、求める最大の整数は $x=8$

例3

a は正の定数とする。3 次不等式 $x^3 - (a+2)x^2 + (2a-3)x + 3a \leq 0$ の解は、

$$0 < a < \boxed{} \text{ のとき, } x \leq -\boxed{}, a \leq x \leq \boxed{},$$

$$a = \boxed{} \text{ のとき, } x \leq -\boxed{}, x = \boxed{},$$

$$a > \boxed{} \text{ のとき, } x \leq -\boxed{}, \boxed{} \leq x \leq a \text{ である。}$$

(解説)

$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a-3)x + 3a$ とおく。

$$= x^3 - 2x^2 - 3x - a(x^2 - 2x - 3)$$

$$= x(x+1)(x-3) - a(x+1)(x-3)$$

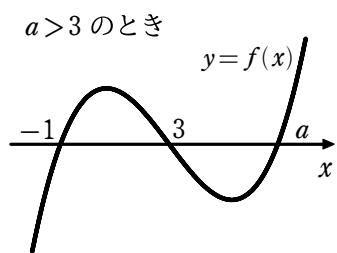
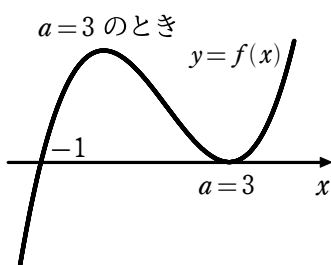
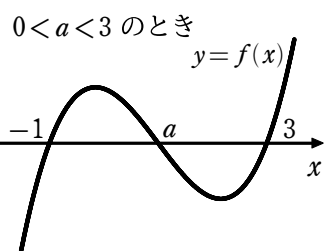
$$= (x-a)(x+1)(x-3)$$

$y=f(x)$ と x 軸との交点は下の図のようになるから、 $f(x) \leq 0$ の解は

$$0 < a < 3 \text{ のとき, } x \leq -1, a \leq x \leq 3$$

$$a = 3 \text{ のとき, } x \leq -1, x = 3$$

$$a > 3 \text{ のとき, } x \leq -1, 3 \leq x \leq a$$



補1

不等式 $\frac{(1-x)^2}{3-x} \leq 1$ を解け.

$$\frac{(1-x)^2}{3-x} \leq 1$$

分母 $\neq 0$ より, $x \neq 3$

両辺 $(3-x)^2 (>0)$ をかけて

$$(1-x)^2(3-x) \leq (3-x)^2$$

$$-x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \leq x^2 - 6x + 9$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2, x > 3$$

補2

a を定数として $f(x) = x^3 - a(a+1)x^2 + (a^3 + a - 1)x - a^2(a-1)$ とおく.
 $f(1) = 0$ を示し, x に関する不等式 $f(x) \geq 0$ を解け.

(解説)

$$f(1) = 1 - a^2 - a + a^3 + a - 1 - a^3 + a^2 = 0$$

よって, $f(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$f(x) = (x-1)\{x^2 + (-a^2 - a + 1)x + a^2(a-1)\} = (x-1)(x-a^2)(x-a+1)$$

よって, $f(x) \geq 0$ は

$$(x-1)(x-a^2)(x-a+1) \geq 0$$

$$a^2 - (a-1) = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ より } a^2 > a-1$$

1 と $a-1, a^2$ の大小を調べて

(i) $1 \leq a-1 < a^2$ すなわち $a \geq 2$ のとき

$$1 \leq x \leq a-1, a^2 \leq x$$

(ii) $a-1 < 1 \leq a^2$ すなわち $a \leq -1, 1 \leq a < 2$ のとき

$$a-1 \leq x \leq 1, a^2 \leq x$$

(iii) $a-1 < a^2 < 1$ すなわち $-1 < a < 1$ のとき

$$a-1 \leq x \leq a^2, 1 \leq x$$