

3.2 解と係数の関係 (3 次)

(1) 解と係数の関係 (3 次)

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解を α, β, γ とすると, α, β, γ が複素数の範囲で因数定理より

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解できる。

両辺 a で割って,

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

これがすべての x について成り立てばよいから,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

となり, これを解と係数の関係という。

解と係数の関係 (3 次)

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解を α, β, γ とするとき,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

例1

3 次方程式 $x^3+x^2-13x+3=0$ の 3 つの解を a, b, c ($a < b < c$) とする

と, $abc = -^{\text{ア}} \boxed{}$, $a^2+b^2+c^2 = ^{\text{イ}} \boxed{}$, $a^3+b^3+c^3 = -^{\text{ウ}} \boxed{}$ である。

(解説)

解と係数の関係より

$$a+b+c=-1, \quad ab+bc+ca=-13, \quad abc=-^{\text{ア}}3$$

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$=(-1)^2-2(-13)=^{\text{イ}}27$$

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

$$=(-1)\{27-(-13)\}+3(-3)=-^{\text{ウ}}49$$

(2) 3 数を解とする 3 次方程式

3 数 α, β, γ を 3 解とする 3 次方程式は、一般に

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0 \quad \text{ただし, } a \neq 0$$

と表せます。このうち、特に $a=1$ であるものは

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0, \quad \text{すなわち,}$$

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

と表せる。

よって、次のことが成り立つ。

3 数を 3 解とする 3 次方程式

3 数 α, β, γ に対して、 $p=\alpha+\beta+\gamma, q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, r=\alpha\beta\gamma$ とすると、 α と β と γ を解とする 3 次方程式の 1 つは

$$x^3-px^2+qx-r=0$$

例2

3 次方程式 $4x^3+ax^2+bx+c=0$ の解が $-1, \frac{1}{2}+i, \frac{1}{2}-i$ のとき、 a, b, c の値を求めよ。ただし、 $i^2=-1$ とする。

解説

解と係数の関係より

$$(-1)+\left(\frac{1}{2}+i\right)+\left(\frac{1}{2}-i\right)=-\frac{a}{4} \quad \therefore a=0$$

$$(-1) \cdot \left(\frac{1}{2}+i\right)+\left(\frac{1}{2}+i\right)\left(\frac{1}{2}-i\right)+\left(\frac{1}{2}-i\right) \cdot (-1)=\frac{b}{4} \quad \therefore b=1$$

$$(-1) \cdot \left(\frac{1}{2}+i\right)\left(\frac{1}{2}-i\right)=-\frac{c}{4} \quad \therefore c=5$$

別解 2 次方程式のときと同様に、 $\alpha=-1, \beta=\frac{1}{2}+i, \gamma=\frac{1}{2}-i$ として

$\alpha+\beta+\gamma, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ を計算して、

$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$ に代入して、両辺を 4 倍してもよい。

例3

(1) 3次方程式 $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ を複素数の範囲で解け。

(2) (1) の3次方程式の3つの解を α, β, γ とするとき, $\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1$ を解にもつ3次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の定数 p, q, r の値を求めよ。

(3) (1) の3次方程式の3つの解を α, β, γ とするとき, $\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1, \frac{1}{\gamma} + 1$ を解にもつ3次方程式 $x^3 + p'x^2 + q'x + r' = 0$ の定数 p', q', r' の値を求めよ。

解説

$$(1) x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^3 - 1 - 2x^2 + 2x = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) - 2x(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - x + 1) = 0 \quad \therefore x=1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = 1$$

解と係数の関係より

$$-p = (\alpha - 1) + (\beta - 1) + (\gamma - 1) = (\alpha + \beta + \gamma) - 3 = 2 - 3 = -1 \quad \therefore p = 1$$

$$q = (\alpha - 1)(\beta - 1) + (\beta - 1)(\gamma - 1) + (\gamma - 1)(\alpha - 1)$$

$$= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3 = 2 - 2 \cdot 2 + 3 = 1$$

$$\begin{aligned} -r &= (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = \alpha\beta\gamma - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) - 1 \\ &= 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \quad \therefore r = 0 \end{aligned}$$

$$(3) -p' = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + 3$$

$$= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} + 3 = \frac{2}{1} + 3 = 5 \quad \therefore p' = -5$$

$$q' = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) + \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} + 2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + 3$$

$$= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} + 2 \cdot 2 + 3 = \frac{2}{1} + 4 + 3 = 9 \quad \therefore q' = 9$$

$$\begin{aligned}
 -r' &= \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \\
 &= \left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + 1\right) = 1 + 2 + 2 + 1 = 6 \\
 &\therefore r' = -6
 \end{aligned}$$

例4

$a + b + c = 2$, $ab + bc + ca = 3$, $abc = 2$ のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $a^2 + b^2 + c^2$ および $a^3 + b^3 + c^3$ の値を求めよ。
- (2) 3次方程式 $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ が $x = a, b, c$ を解にもつとき, A, B, C を求めよ。
- (3) $a^5 + b^5 + c^5$ の値を求めよ。

(解説)

$$(1) a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 2^2 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\
 &= 2 \cdot (-2 - 3) + 3 \cdot 2 = -4
 \end{aligned}$$

(2) 3次方程式 $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ が $x = a, b, c$ を解にもつとき

$$\begin{aligned}
 x^3 + Ax^2 + Bx + C &= (x - a)(x - b)(x - c) \\
 &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc \\
 &= x^3 - 2x^2 + 3x - 2
 \end{aligned}$$

$$\therefore A = -2, B = 3, C = -2$$

(3) x^5 を $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ で割ると

$$x^5 = (x^3 - 2x^2 + 3x - 2)(x^2 + 2x + 1) - 2x^2 + x + 2$$

$x = a$ を代入すると, $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ は $x = a$ を解にもつから,

$$a^3 - 2a^2 + 3a - 2 = 0 \text{ より}$$

$$a^5 = -2a^2 + a + 2$$

同様に

$$b^5 = -2b^2 + b + 2, c^5 = -2c^2 + c + 2$$

よって

$$\begin{aligned}
 a^5 + b^5 + c^5 &= (-2a^2 + a + 2) + (-2b^2 + b + 2) + (-2c^2 + c + 2) \\
 &= -2(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) + 6 \\
 &= -2 \cdot (-2) + 2 + 6 = 12
 \end{aligned}$$

例5

(1) 次を満たす2数 x, y を求めよ。

$$x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

(2) 次を満たす3数 x, y, z を求めよ。

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3, \quad xyz = 1$$

解説

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ より

$$\frac{x+y}{xy} = 2 \quad \therefore x+y = 2xy \quad \therefore xy = 1$$

x, y は2次方程式 $t^2 - 2t + 1 = 0$ の2つの解より

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1 \quad (2 \text{ 重解})$$

よって, $x = y = 1$

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ より

$$\frac{xy + yz + zx}{xyz} = 3 \quad \therefore xy + yz + zx = 3xyz \quad \therefore xy + yz + zx = 3$$

x, y, z は3次方程式 $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$ の3つの解より

$$(t-1)^3 = 0 \quad \therefore t = 1 \quad (3 \text{ 重解})$$

よって, $x = y = z = 1$

例6

x, y, z が方程式

$$x + y + z = 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 8$$

を満たすとき, これらの式から $xy + yz + zx$ および xyz の値を求め

と, $xy + yz + zx = \text{ア} \boxed{}, \quad xyz = \text{イ} \boxed{}$ となる. したがって, $x, y,$

z を解とする t の3次方程式は $\text{ウ} \boxed{}$ と書ける. これを解いて, $x \leq y \leq z$ となる x, y, z を求めると,

$x = \text{エ} \boxed{}, \quad y = \text{オ} \boxed{}, \quad z = \text{カ} \boxed{}$ となる.

解説

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \text{ より}$$

$$2^2 = 6 + 2(xy + yz + zx) \quad \therefore xy + yz + zx = -1$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \text{ より}$$

$$8 - 3xyz = 2 \cdot (6 + 1) \quad \therefore xyz = -2$$

x, y, z を解とする t の 3 次方程式の 1 つは

$$(t-x)(t-y)(t-z) = 0$$

$$\begin{aligned} (t-x)(t-y)(t-z) &= t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz \\ &= t^3 - 2t^2 - t + 2 \end{aligned}$$

よって

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$$

$$(t+1)(t-1)(t-2) = 0$$

$$x \leq y \leq z \text{ より } x = -1, y = 1, z = 2$$

補1

(1) 3 次方程式 $x^3 - px^2 + 11x - q = 0$ が 3 つの連続する正の整数を解とするとき、 p, q の値を求めよ。

(2) 3 次方程式 $4x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$ の 3 つの実数解の比は $1 : 2 : 3$ である。このとき、 a, b の値を求め、かつ 3 次方程式の解を求めよ。

解説

(1) 3 つの連続する正の整数の解を $n-1, n, n+1$ (ただし、 n は 2 以上の整数) とおく

解と係数の関係より

$$(n-1) + n + (n+1) = p \cdots \textcircled{1}$$

$$(n-1)n + n(n+1) + (n+1)(n-1) = 11 \cdots \textcircled{2}$$

$$(n-1)n(n+1) = q \cdots \textcircled{3}$$

②より

$$3n^2 = 12 \quad \therefore n = 2$$

①より、 $p = 1 + 2 + 3 = 6$

③より、 $q = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

(2) 与えられた方程式の解を $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ とすると

解と係数の関係より

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = -\frac{a}{4}, \alpha \cdot 2\alpha + 2\alpha \cdot 3\alpha + 3\alpha \cdot \alpha = \frac{b}{4}, \alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a = -24\alpha, b = 44\alpha^2, 8\alpha^3 = 1$$

α は実数であるから、 $\alpha = \frac{1}{2}, a = -12, b = 11$

3 次方程式の解は、 $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

補2

方程式 $x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + c = 0$ の解は次の 3 つの条件を満足する。

(A) 解の 1 つは 3 である。

(B) すべての解の和は 2 である。

(C) すべての解の積は 12 である。

このとき、 a, b, c の値と方程式の解を求めよ。

解説

$x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + c = 0$ の 3 以外の解を α, β, γ とすると

$$x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + c = (x-3)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とでき、これは x についての恒等式より

$$a = -(\alpha + \beta + \gamma + 3) = -2$$

$$c = 3\alpha\beta\gamma = 12$$

このとき、

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + bx + 12 = 0$$

これが $x=3$ を解にもつから

$$81 - 54 - 63 + 3b + 12 = 0 \quad \therefore b = 8$$

このとき、

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x+2)(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -2, -1, 2, 3$$

別解

恒等式から、さらに

$$-7 = 3(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

$$b = -3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

を得る。これらより、

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta\gamma = 4, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4$$

これらから、 $b = 8$

α, β, γ を 3 解とする 3 次方程式を作り、それを解けばよい。