

高3数学 発展問題演習 演習 8. 漸化式

1 [2001 早稲田大]

数列 $\{a_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) があるとき、初項から第 n 項までの和を S_n ($n=1, 2, 3, \dots$) とかく。いま、 a_n と S_n が、関係式

$$S_n = 2a_n^2 + \frac{1}{2}a_n - \frac{3}{2}$$
 を満たし、かつ、すべての項 a_n は同符号である。

- (1) a_n の満たす漸化式 (a_{n+1} と a_n の関係式) を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を n の式で表せ。

2 [一橋大]

数列 $\{a_n\}$ があって、 $a_1=1, a_2=2$ であり、連続する 3 項 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} は n が奇数のとき等比数列をなし、 n が偶数のとき等差数列をなす。

- (1) a_n を求めよ。
- (2) a_1 から a_{2n} までの総和を求めよ。

3 [2008 慶応義塾大]

$a_1=3, 4a_{n+1}=12a_n-2\cdot 3^{n-1}n+3^{n-1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと、 $b_{n+1}-b_n$ を n の式で表すと $\boxed{}n + \boxed{}$ である。

(2) a_n を n の式で表すと $-\frac{3^{n-2}}{\boxed{}}\left(n^2 - \boxed{}n - \boxed{}\right)$ である。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと、 S_n を最大にする n の値の中で最も小さいものは $\boxed{}$ である。

高3数学 発展問題演習 演習 8. 漸化式

4 [2022 慶応義塾大]

数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1} = -|a_n| - \frac{1}{2}a_n + 5$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たすとする。

(1) $a_1 = \frac{1}{2}$ ならば, $a_2 = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$, $a_3 = -\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。

(2) $-2 \leq a_n \leq -1$ ならば, a_{n+1} および a_{n+2} のとりうる値の範囲は, それぞれ

$\text{オ} \frac{\quad}{\quad} \leq a_{n+1} \leq \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$, $-\frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \leq a_{n+2} \leq -\text{コ} \frac{\quad}{\quad}$ である。

以下, $a_1 = 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ とする。

(3) $a_n < 0$ となる自然数 n のうち最小のものを m とすると, $m = \text{サ} \frac{\quad}{\quad}$ である。

(4) (3) の m に対して, 自然数 k が $2k \geq m$ を満たすとき,

$$a_{2k+2} = -\frac{\text{シ}}{\text{ス}} a_{2k} - \frac{\text{セ}}{\text{ソ}} \frac{\quad}{\quad}$$

より

$$a_{2k} = -\frac{\text{タ}}{\text{チ}} \frac{\quad}{\quad} + \frac{3}{\text{ツ} \frac{\quad}{\quad}} \left(-\frac{\text{テ}}{\text{ト}} \frac{\quad}{\quad} \right)^{k-\text{ナ} \frac{\quad}{\quad}}$$

が成り立つ。

5 [2024 京都大]

与えられた自然数 a_0 に対して, 自然数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を次のように定める。

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{3a_n+1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

(2) $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

高3数学 発展問題演習 演習 8. 漸化式

6 [東京都立大]

(1) α, β, γ を 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ (p, q, r は定数) の 3 つの解とし, A, B, C を定数とする. このとき, $x_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定めれば関係式

$x_{n+3} + px_{n+2} + qx_{n+1} + rx_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ.

(2) (1)を利用して $a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 21, a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_n - 6a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をみたす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

7 [奈良県立医科大]

a, b, c を実数の定数とする. このとき, 以下の 4 条件を同時に満たすような実数の数列 $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在するために, 定数 a, b, c の満たすべき必要十分条件を求めよ.

条件(1) $x_n = -a$ となる正整数 n は存在しない.

条件(2) ある正整数 $n > 1$ について $x_n \neq x_1$ が成り立つ.

条件(3) 任意の正整数 n について $x_{n+2} = x_n$ が成り立つ.

条件(4) 任意の正整数 n について $x_{n+1} = \frac{bx_n + c}{x_n + a}$ が成り立つ.

8 [早稲田大]

不等式 $b^2 - 4c < 0$ をみたす整数 b, c に対して, 2 次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の解の一方を α とする. 条件 $a_0 = 1, a_1 = \alpha, a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で定まる数列 $\{a_n\}$ が周期をもつとき, b, c を求めよ. ただし, 数列 $\{a_n\}$ が周期 p ($p > 0$) をもつとは, $a_{n+p} = a_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つことをいう.

9 [1997 九州大]

正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$ (k は 2 以上の整数) の近似値を求めるため $f(x) = x^k - c$,

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ($x > 0$) とおき, $\sqrt[k]{c} < a_1, a_{n+1} = g(a_n)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする.

(1) $\sqrt[k]{c} < a_n$ ならば, $\sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$ を示せ.

(2) $k = 3$ のとき, $\sqrt[3]{c} < a_n$ ならば, $a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n - \sqrt[3]{c})^2$ を示せ.

(3) $k = 3, c = 2, a_1 = 1.3$ のとき, $a_5 - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$ を示せ.

高3数学 発展問題演習 演習 8. 漸化式

10 [2012 慶応義塾大]

円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ と外接し、 x 軸と接する円で中心の x 座標が正であるものを条件 P を満たす円ということにする。

- (1) 条件 P を満たす円の中心は、曲線 $y = \sqrt{\square} \ (x > 0)$ の上にある。また、条件 P を満たす半径 9 の円を C_1 とし、その中心の x 座標を a_1 とすると、 $a_1 = \sqrt{\square}$ である。
- (2) 条件 P を満たし円 C_1 に外接する円を C_2 とする。また、 $n = 3, 4, 5, \dots$ に対し、条件 P を満たし、円 C_{n-1} に外接し、かつ円 C_{n-2} と異なる円を C_n とする。円 C_n の中心の x 座標を a_n とするとき、自然数 n に対し a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (3) (1), (2) で定めた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

11 [2010 一橋大]

0 以上の整数 a_1, a_2 が与えられたとき、数列 $\{a_n\}$ を $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ により定める。

- (1) $a_1 = 1, a_2 = 2$ のとき、 a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。
- (2) $a_2 = 3a_1$ のとき、 $a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

12 [京都大]

$a_0 = 0, a_{n+2} - pa_{n+1} + qa_n = 0 \ (n \geq 0, p, q, a_1 \text{ は整数})$ をみたす数列 $\{a_n\}$ がある。 r を素数とし、 p は r で割り切れないものとする。ある自然数 k について、 a_k と a_{k+1} が r で割り切れるならば、すべての n について a_n は r で割り切れることを示せ。

13 [大阪医科大学]

自然数 a, b に対して、その最大公約数を $G(a, b)$ とする。

- (1) $a > b$ のとき、 $G(a, b) = G(a - b, b)$ を示せ。

自然数 n に対して $(1 + \sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{3}$ (p_n, q_n は自然数) とおく。

- (2) $G(p_{n+2}, q_{n+2})$ と $G(p_n, q_n)$ の関係式を導け。
- (3) $G(p_n, q_n)$ の値を求めよ。

14 [2006 九州大]

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1=b_1=1$ および, 関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n, \quad b_{n+1}=2a_n^2+b_n^2$$

を満たすものとする。

- (1) $n \geq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れないことを示せ。
- (2) $n \geq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素であることを示せ。