

2.3 2次関数の最大・最小

(1) 2次関数の最大と最小

関数の値域に最大の値があるとき、この値をこの関数の最大値といい、関数の値域に最小の値があるとき、この値を最小値という。ここでは、2次関数の最大値や最小値を求めることを考えよう。

例1

関数 $y = x^2 - 4x + 7$ は、 $x = \boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。

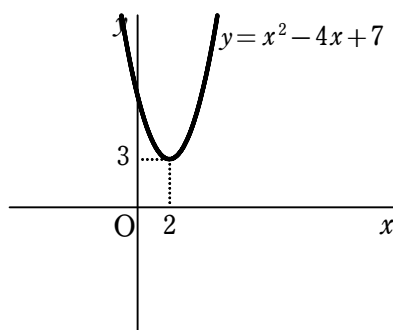
解説

$$y = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3$$

グラフは下に凸、頂点は $(2, 3)$

$x = 2$ のとき最小値 3 をとる

注 この場合、最大値はもたないので、最大値はなしとなる。



例2

関数 $y = 3x^2 - 6x - 5$ は $x = \boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。

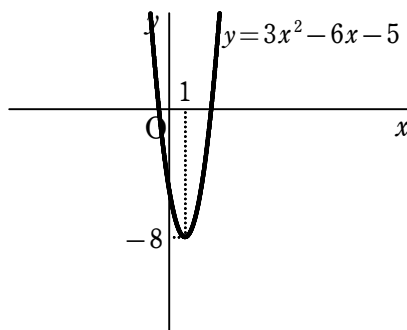
解説

$$y = 3x^2 - 6x - 5 = 3(x - 1)^2 - 8$$

グラフは下に凸、頂点は $(1, -8)$

$x = 1$ のとき最小値 -8 をとる

注 最大値はなし



例3

2 次関数 $y = -x^2 + 5x + 3$ の最大値を求めよ。

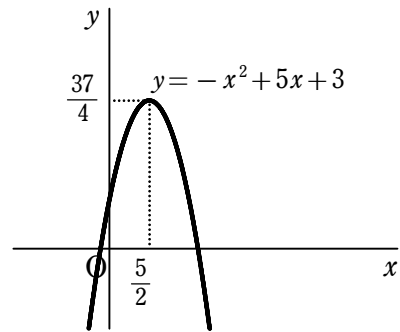
(解説)

$$y = -x^2 + 5x + 3 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{37}{4}$$

グラフは上に凸，頂点は $\left(\frac{5}{2}, \frac{37}{4}\right)$

$x = \frac{5}{2}$ のとき最大値 $\frac{37}{4}$ をとる

☐ 最小値はなし

**(2) 定義域に制限がある場合の最大と最小**

定義域に制限がある場合における，2 次関数の最大値と最小値を求めることを考えてみよう。

例5

x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ であるときの 2 次関数 $y = 2x^2 - 3x + 1$ の最大値と最小値を求めよ。

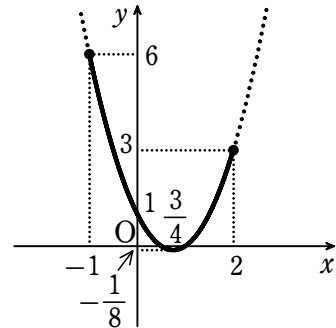
(解説)

$$y = 2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

グラフは下に凸，頂点は $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

$x = -1$ で最大値 6，

$x = \frac{3}{4}$ で最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる

**例6**

$-4 \leq x \leq -1$ のとき，2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 1$ の最大値と最小値を求めよ。

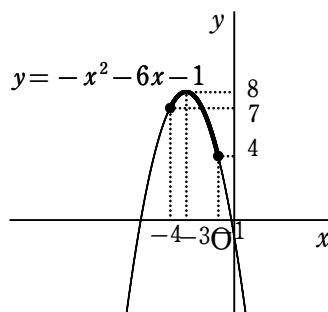
(解説)

$$y = -x^2 - 6x - 1 = -(x+3)^2 + 8 \quad (-4 \leq x \leq -1)$$

グラフは上に凸，頂点は $(-3, 8)$

$x = -3$ で最大値 8，

$x = -1$ で最小値 4 をとる



例7

関数 $y = (x^2 + 2x)^2 + 4(x^2 + 2x) - 5$ の最小値を求めよ。

解説

$x^2 + 2x = t$ とおくと

$$t = (x+1)^2 - 1 \geq -1$$

$$y = t^2 + 4t - 5 = (t+2)^2 - 9 \quad t \geq -1$$

グラフは下に凸，頂点 $(-2, -9)$

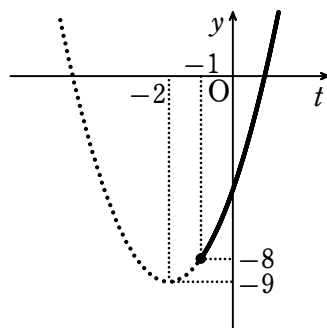
$t = -1$ のとき最小値 -8 をとる

参考

$$t = -1 \text{ より } x^2 + 2x = -1 \quad \therefore x = -1$$

よって， $x = -1$ のとき最小値 -8 をとる

㊦ 文字を置き換えたときは，置き換えた文字の変域に注意。



例8

(1) 2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $x=1$ で最小値 3 をとり， $f(0) = 5$ となるとき $a = \text{ア}$, $b = \text{イ}$, $c = \text{ウ}$ である。

(2) 2次関数 $y = x^2 + ax + b$ は $x = -1$ で最小になり，そのグラフは点 $(1, 2)$ を通る。このとき， a, b の値と y の最小値を求めよ。

(3) 2次関数 $y = -x^2 + 4x + a$ ($1 \leq x \leq 4$, a は定数) は， $x = \text{ア}$ のとき，最大値 7 をとる。このとき，最小値は イ である。

(4) $0 \leq x \leq 3$ における 2次関数 $y = x^2 - 2x + c$ の最大値が 1 であるとき，定数 c の値を求めよ。

(5) 2次関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + b$ が $0 \leq x \leq 5$ において最大値 12，最小値 -6 をとるとき， $(a, b) = \text{ア}$ である。

解説

(1) 求める 2 次関数は

$$f(x) = a(x-1)^2 + 3 \quad (a > 0)$$

とおける

$$f(0) = 5 \text{ より, } 5 = a + 3 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{よって, } f(x) = 2(x-1)^2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5$$

$$\text{以上より, } a = 2, b = -4, c = 5$$

(2) $x = -1$ で最小になるから,

$$y = (x+1)^2 + c$$

とおける

点 (1, 2) を通るから

$$2 = 4 + c \quad \therefore c = -2$$

$$\text{このとき, } y = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$$

$$\text{以上より, } a = 2, b = -1$$

また, 最小値は -2

$$(3) y = -(x-2)^2 + 4 + a \quad (1 \leq x \leq 4) \text{ より}$$

$x = 2$ で最大値 $4 + a$ をとるから

$$4 + a = 7 \quad \therefore a = 3$$

このとき, $x = 4$ で最小値 3 をとる

$$(4) y = x^2 - 2x + c \text{ を変形すると}$$

$$y = (x-1)^2 - 1 + c$$

$x = 3$ で最大値 $3 + c$ をとるから

$$3 + c = 1 \quad \therefore c = -2$$

$$(5) f(x) = a(x-2)^2 - 4a + b$$

(i) $a > 0$ のとき

$$\text{最小値 } f(2) = -4a + b = -6 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{最大値 } f(5) = 5a + b = 12 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } a = 2, b = 2$$

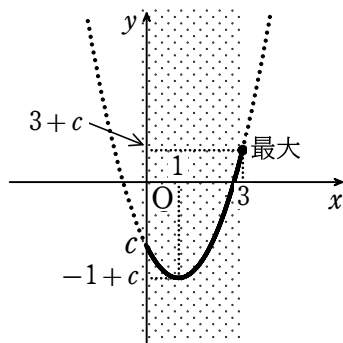
(ii) $a < 0$ のとき

$$\text{最大値 } f(2) = -4a + b = 12 \dots \textcircled{3}$$

$$\text{最小値 } f(5) = 5a + b = -6 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より, } a = -2, b = 4$$

$$(i), (ii) \text{ より, } (a, b) = (2, 2), (-2, 4)$$



例9

a を実数として、 $a \leq x \leq a+2$ で定義される関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ がある。この関数の最大値、最小値をそれぞれ $M(a), m(a)$ とするとき、関数 $M(a), m(a)$ のグラフを(別々に)かけ。

(解説)

$$f(x) = (x-1)^2 + 2$$

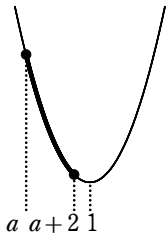
$y = f(x)$ のグラフは下に凸、

軸は $x=1$, 頂点は $(1, 2)$

最小値について

定義域が、(i) 軸より左にあるか、(ii) 軸を含むか、(iii) 軸より右にあるか、で場合分けをする。

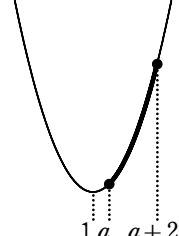
(i)



(ii)



(iii)



(i) $a+2 < 1$, すなわち $a < -1$ のとき

$$m(a) = f(a+2) = (a+1)^2 + 2$$

(ii) $a < 1 \leq a+2$, すなわち $-1 \leq a < 1$ のとき

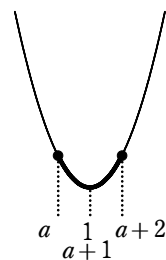
$$m(a) = f(1) = 2$$

(iii) $a \geq 1$ のとき

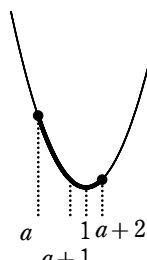
$$m(a) = f(a) = (a-1)^2 + 2$$

最大値について

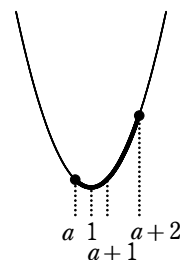
(i)



(ii)



(iii)



(i) 区間の中央が軸と重なるとき、両端で最大となる。あとは、区間の中央が軸より(ii)左にあるか、(iii)右にあるか、で場合分けをする。

(i) $a+1=1$, すなわち $a=0$ のとき

$$M(a) = f(0) = f(2) = 3$$

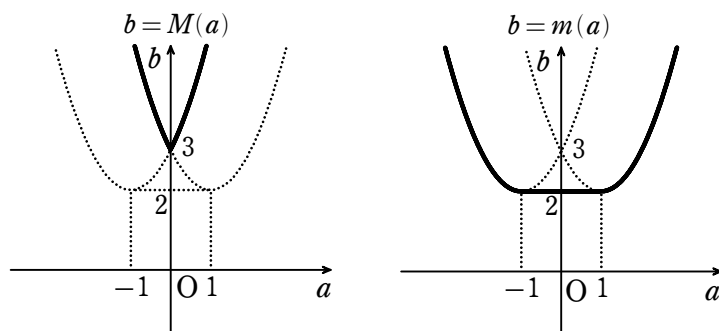
(ii) $a+1 < 1$, すなわち $a < 0$ のとき

$$M(a) = f(a) = (a-1)^2 + 2$$

(iii) $a+1 > 1$, すなわち $a > 0$ のとき

$$M(a) = f(a+2) = (a+1)^2 + 2$$

よって, $b = M(a)$ のグラフは下の左図, $b = m(a)$ のグラフは下の右図.



別解

上の結果から, 最大値, 最小値は頂点か端点(区間の端の点)でとることが分かる。よって, 以下のような解答でもよい。

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

グラフは下に凸, 頂点は $(1, 2)$

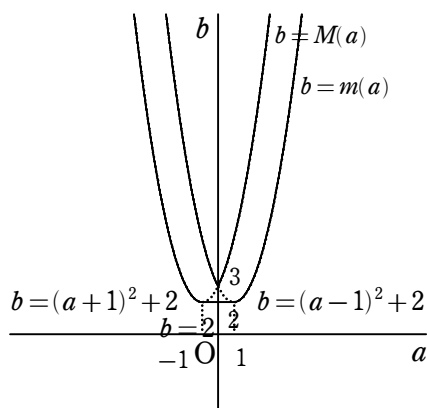
$f(x)$ は連続であるから, 頂点または端点で最大値, 最小値をとる

頂点 $f(1) = 2$ ($a \leq 1 \leq a+2$ すなわち $-1 \leq a \leq 1$)

端点 $f(a) = (a-1)^2 + 2$

$$f(a+2) = (a+1)^2 + 2$$

これらをグラフ化して



この中で最大のものが最大値, 最小のものが最小値となるから, グラフより,

$$M(a) = \begin{cases} (a-1)^2 + 2 & (a < 0) \\ (a+1)^2 + 2 & (a \geq 0) \end{cases}$$

$$m(a) = \begin{cases} (a+1)^2 + 2 & (a < -1) \\ 2 & (-1 \leq a < 1) \\ (a-1)^2 + 2 & (a \geq 1) \end{cases}$$

としてもよい。 $b = M(a)$, $b = m(a)$ のグラフは、上にすでに出来上がっている。

㊦ 頂点で最大値、最小値をとるためには、頂点が定義域内になければならないので、頂点には定義域に入るための条件が必要となる。端点はいつでも定義域に入っているの、制限はない。

㊦ 関数が連続である(つながっている)ときは、頂点、以外の区間の途中では最大、最小値はとらない。つまり、最大値、最小値の候補となるのは頂点か端点のみであり、その中で最大、最小となるものが最大値、最小値になる。

例10

a を定数とすると、2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 2a^2$ について

- (1) 区間 $0 \leq x \leq 2$ におけるこの関数の最大値と最小値を求めよ。
- (2) 区間 $0 \leq x \leq 2$ におけるこの関数の最小値が 20 であるとき、 a の値を求めよ。

解説

$$(1) y = x^2 - 2ax + 2a^2 = (x - a)^2 + a^2$$

グラフは下に凸、頂点は (a, a^2) 、軸は $x = a$

最小値について

(i) $a < 0$ のとき

$x = 0$ で最小、最小値は $2a^2$

(ii) $0 \leq a < 2$ のとき

$x = a$ で最小、最小値は a^2

(iii) $a \geq 2$ のとき

$x = 2$ で最小、最小値は $2a^2 - 4a + 4$

最大値について

(i) $a=1$ のとき

$x=0, 2$ で最大, 最大値は 2

(ii) $a<1$ のとき

$x=2$ で最大, 最大値は $2a^2-4a+4$

(iii) $a>1$ のとき

$x=0$ で最大, 最大値は $2a^2$

(2) (1)より

$a<0$ のとき, $2a^2=20$ $a<0$ より, $a=-\sqrt{10}$

$0\leq a<2$ のとき, $0\leq a^2<4$ より, $a^2=20$ を満たす実数 a は存在しない.

$2\leq a$ のとき

$$2a^2-4a+4=20$$

$$a^2-2a-8=0$$

$$(a+2)(a-4)=0$$

$a\geq 2$ より, $a=4$

以上より, $a=-\sqrt{10}, 4$

補1

2 次関数 $y=x^2-2ax-a+6$ の最小値を $f(a)$ とする. a を動かすとき, $f(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ.

(解説)

$$y=x^2-2ax-a+6=(x-a)^2-a^2-a+6$$

グラフは下に凸, 頂点は $(a, -a^2-a+6)$

最小値は, $f(a)=-a^2-a+6$

$$f(a)=-a^2-a+6=-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

グラフは上に凸, 頂点は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

よって, $f(a)$ は $a=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{25}{4}$ をとる

補2

2 次方程式 $x^2-2ax-2a^2+4a+4=0$ (a は実数) が異なる 2 つの実数解 α, β をもつとき, $\alpha^2+\beta^2$ がとり得る最小の整数はいくらか。

(解説)

$$x^2-2ax-2a^2+4a+4=0 \cdots \textcircled{1}$$

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-a)^2 - (-2a^2 + 4a + 4) \\ &= 3a^2 - 4a - 4 \end{aligned}$$

① は異なる 2 つの実数解 α, β をもつから, $D > 0$ より

$$3a^2 - 4a - 4 > 0$$

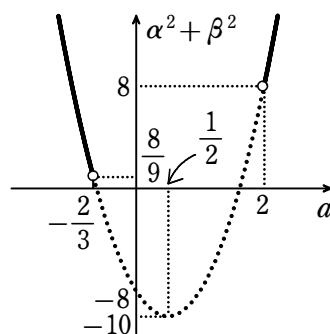
$$\therefore a < -\frac{2}{3}, \quad 2 < a \cdots \textcircled{2}$$

また、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = -2a^2 + 4a + 4$$

よって

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (2a)^2 - 2(-2a^2 + 4a + 4) \\ &= 8a^2 - 8a - 8 \\ &= 8\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 10 \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$



② の範囲において ③ のとりうる値を考えると

$$\alpha^2 + \beta^2 > \frac{8}{9}$$

したがって、 $\alpha^2 + \beta^2$ がとりうる最小の整数は 1

補3

2 次方程式 $x^2 - ax + 2a - 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とする. $|\alpha - \beta|$ は a = のとき最小値 1 をとる.

(解説)

解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = 2a - 5$$

よって

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta|^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= a^2 - 4(2a - 5) \\ &= a^2 - 8a + 20 \\ &= (a - 4)^2 + 4 \end{aligned}$$

$|\alpha - \beta|^2$ は $a = 4$ のとき最小値 4 をとる

$|\alpha - \beta| \geq 0$ より、 $|\alpha - \beta|$ は $a = 4$ のとき最小値 2 をとる

補4

(1) x が $-3 \leq x \leq 3$ の範囲を動くとき

$$f(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 2) - 5x^2 - 10x + 2$$

の最大値, 最小値と, そのときの x の値を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = x(x-1)(x-3)(x-4)$ は $0 \leq x \leq 4$ の範囲において, x

= $\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとり, $x = \boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。

(3) $t = x^2 - 3x$ とおく. x が $0 \leq x \leq 4$ の範囲を動くとき, t のとりうる値の範囲を求めよ. $y = 2x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 15x + 3$ とおく. y を t の式で表せ. また, $0 \leq x \leq 4$ での y の最大値と最小値を求めよ.

(解説)

$$(1) t = x^2 + 2x \text{ とおくと, } t = (x+1)^2 - 1$$

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ より, } -1 \leq t \leq 15$$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 2) - 5(x^2 + 2x) + 2 \quad (-1 \leq t \leq 15)$$

$$= t^2 + t - 6 - 5t + 2$$

$$= t^2 - 4t - 4 = (t-2)^2 - 8$$

$t = 15$ のとき最大

最大値は 161

このとき,

$$x^2 + 2x = 15$$

$$(x+5)(x-3) = 0$$

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ より, } x = 3$$

$t = 2$ のとき最小

最小値は -8

このとき,

$$x^2 + 2x = 2$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ より, } x = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$(2) f(x) = x(x-1)(x-3)(x-4) \quad (0 \leq x \leq 4)$$

$$= x(x-4) \times (x-1)(x-3)$$

$$= (x^2 - 4x)(x^2 - 4x + 3)$$

$$t = x^2 - 4x \text{ とおくと, } t = (x-2)^2 - 4$$

$$0 \leq x \leq 4 \text{ より, } -4 \leq t \leq 0$$

$$f(x) = t(t+3) = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad (-4 \leq t \leq 0)$$

$t = -4$ のとき最大

最大値 $^{-}4$

このとき,

$$x^2 - 4x = -4$$

$0 \leq x \leq 4$ より, $x = 2$

$t = -\frac{3}{2}$ のとき最小

最小値 $^{\mp} -\frac{9}{4}$

このとき,

$$x^2 - 4x = -\frac{3}{2}$$

$0 \leq x \leq 4$ より, $x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$

$$(3) \ t = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad (0 \leq x \leq 4)$$

よって, $-\frac{9}{4} \leq t \leq 4$

$$t^2 = (x^2 - 3x)^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2$$

$$y = 2x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 15x + 3$$

$$= 2(x^4 - 6x^3 + 9x^2) - 5x^2 + 15x + 3$$

$$= 2(x^2 - 3x)^2 - 5(x^2 - 3x) + 3 \text{ より}$$

$$y = 2t^2 - 5t + 3 = 2\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \quad \left(-\frac{9}{4} \leq t \leq 4\right)$$

$t = -\frac{9}{4}$ のとき最大値 $\frac{195}{8}$,

$t = \frac{5}{4}$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる

補5

関数 $y=x^2$ の $a \leq x \leq a+2$ における最大値と最小値との差が3であるとき、 a の値を求めよ。

解説

$f(x)=x^2$ の $a \leq x \leq a+2$ における最大値を $M(a)$ 、最小値を $m(a)$ とする。

(i) $a \leq -2$ のとき

$$M(a)=f(a)=a^2, \quad m(a)=f(a+2)=(a+2)^2$$

よって、

$$M(a)-m(a)=a^2-(a+2)^2=-4(a+1) \geq 4$$

となり、題意を満たす a の値は存在しない

(ii) $-2 < a < -1$ のとき

$$M(a)=f(a)=a^2, \quad m(a)=f(0)=0$$

よって、 $M(a)-m(a)=a^2=3$ より、 $a=-\sqrt{3}$

(iii) $a=-1$ のとき

$$M(a)=f(1)=f(-1)=1, \quad m(a)=f(0)=0$$

よって、 $M(a)-m(a)=1$ となり不適

(iv) $-1 < a \leq 0$ のとき

$$M(a)=f(a+2)=(a+2)^2, \quad m(a)=f(0)=0$$

よって、 $M(a)-m(a)=(a+2)^2=3$ より、 $a=\sqrt{3}-2$

(v) $0 < a$ のとき

$$M(a)=f(a+2)=(a+2)^2, \quad m(a)=f(a)=a^2$$

よって、

$$M(a)-m(a)=(a+2)^2-a^2=4(a+1) > 4$$

となり、条件を満たす a の値は存在しない

以上より、求める a の値は $a=-\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{3}-2$

補6

a を実数とする。 x の2次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a-1 \leq x \leq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。

(1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3) a が実数全体を動くとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。

解説

$$(1) a = \frac{1}{2} \text{ のとき, } f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$$

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で、軸は直線 $x = -\frac{1}{4}$ より

$f(x)$ は $x = -\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{15}{16}$ をとるから

$$m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16}$$

$$(2) f(x) = x^2 + ax + 1 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 1$$

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で、軸は直線 $x = -\frac{a}{2}$,

頂点は点 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + 1\right)$ である

(i) $a+1 < -\frac{a}{2}$ すなわち $a < -\frac{2}{3}$ のとき

$f(x)$ は $x = a+1$ で最小

$$m(a) = f(a+1) = 2a^2 + 3a + 2$$

(ii) $a-1 \leq -\frac{a}{2} \leq a+1$ すなわち $-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3}$ のとき

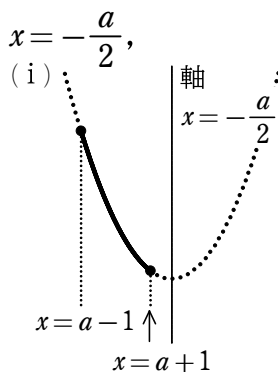
$f(x)$ は $x = -\frac{a}{2}$ で最小となる。

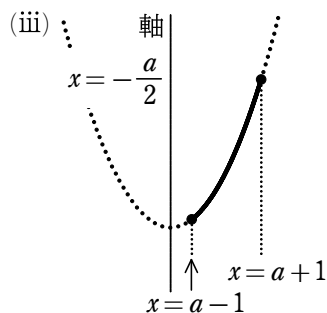
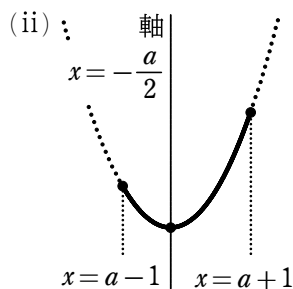
$$m(a) = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + 1$$

(iii) $-\frac{a}{2} < a-1$ すなわち $\frac{2}{3} < a$ のとき

$f(x)$ は $x = a-1$ で最小となる。

$$m(a) = f(a-1) = 2a^2 - 3a + 2$$





以上より

$$a < -\frac{2}{3} \text{ のとき, } m(a) = 2a^2 + 3a + 2$$

$$-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3} \text{ のとき, } m(a) = -\frac{a^2}{4} + 1$$

$$\frac{2}{3} < a \text{ のとき, } m(a) = 2a^2 - 3a + 2$$

$$(3) 2a^2 \pm 3a + 2 = 2\left(a \pm \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \text{ (複号同順)}$$

であるから, $y = m(a)$ のグラフは, 右図のようになる

$$m\left(\pm \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}, \quad m\left(\pm \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}, \quad \frac{8}{9} > \frac{7}{8} \text{ より}$$

$m(a)$ は $a = \pm \frac{3}{4}$ のとき最小値 $\frac{7}{8}$ をとる

