

高3数学 標準問題演習 演習 13. 確率

① [I . 2001 東京都立大 II . 2021 中央大]

I . 3 個のサイコロを同時に振る.

- (1) 3 個のうち, いずれか 2 個のサイコロの目の和が 5 になる確率を求めよ.
- (2) 3 個のうち, いずれか 2 個のサイコロの目の和が 10 になる確率を求めよ.
- (3) どの 2 個のサイコロの目の和も 5 の倍数でない確率を求めよ.

II . n 人がじゃんけんを 1 回する. ただし, $n \geq 2$ とする.

- (1) 1 人だけが勝つ確率を, n を用いて表せ.
- (2) $1 \leq k \leq n-1$ とする. ちょうど k 人が勝つ確率を, n, k を用いて表せ. なお, 二項係数 ${}_nC_k$ をそのまま用いてよい.
- (3) 勝者が決まる確率を, n を用いて表せ.

② [I . 1997 神戸大 II . 2007 神戸大]

I . $2n$ 個の白玉と n 個の赤玉をでたらめに並べる.

- (1) 直線上に並べるときに赤玉どうしが隣り合わない確率を求めよ.
- (2) 円周状に並べるときに赤玉どうしが隣り合わない確率を求めよ.

II . n を 3 以上の整数とする.

- (1) さいころを n 回投げたとき, 出た目の数がすべて 1 になる確率を求めよ.
- (2) さいころを n 回投げたとき, 出た目の数が 1 と 2 の 2 種類になる確率を求めよ.
- (3) さいころを n 回投げたとき, 出た目の数が 3 種類になる確率を求めよ.

③ [2013 愛媛大]

1 から 40 までの番号をつけた 40 枚のカードが 2 組ある. これら 80 枚のカードを袋に入れてよくかき混ぜて, 同時に 3 枚を取り出すとき, 次の確率を求めよ.

- (1) 3 つの番号がすべて 3 の倍数である確率
- (2) 3 つの番号の積が 3 の倍数である確率
- (3) 3 つの番号の和が 3 の倍数である確率
- (4) 3 つの番号の積が 27 の倍数である確率

高3数学 標準問題演習 演習 13. 確率

4 [I. 2023 京都大 II. 2020 九州大 III. 2020 同志社大 IV. 一橋大]

I. n を自然数とする。1 個のさいころを n 回投げ、出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とし、 n 個の数の積 $X_1 X_2 \dots X_n$ を Y とする。

- (1) Y が 5 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) Y が 15 で割り切れる確率を求めよ。

II. 4 個のさいころを同時に投げるとき、出る目すべての積を X とする。

- (1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

III. n は 3 以上の自然数とし、さいころを n 回続けて投げる試行を考える。 n 回目に 3

の目が出て、3 の目が出た回数がちょうど 3 回である確率は ア である。次に、 n 回

目までに出了 n 個の目の積が偶数である確率は イ であり、4 の倍数である確率は

ウ である。また、 n 回目までに出了目の最大値が 4 である確率は エ である。

最後に、 n 回目までに出了目の最大値と最小値の差が 3 となる確率は オ である。

IV. N は 3 以上の整数とする。1 から N までの整数のうちのひとつを無作為に取り出すことを 1 回の試行とする。この試行を独立に m 回繰り返す、取り出された数のうち最大のものを H 、最小のものを L とする。

- (1) $L=2$ となる確率を求めよ。
- (2) $H=L+1$ となる確率を求めよ。
- (3) $H=L+2$ となる確率を求めよ。

5 [2004 東北大]

A, B, C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは、以後のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんを繰り返す、最後に残ったものを勝者とする。ただし、あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える。

- (1) 1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (2) 2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (3) 3 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (4) $n \geq 4$ とする。 n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

高3数学 標準問題演習 演習 13. 確率

6 [I . 2020 兵庫県立大 II . 2010 千葉大 III . 2021 岡山大]

I . 表裏が確率 $\frac{1}{2}$ ずつで出る硬貨が 1 枚ある。この硬貨を 7 回続けて投げる。このとき、次の場合の確率を求めよ。

- (1) 表がちょうど 3 回出る。
- (2) 表が 3 回以上出る。
- (3) 表が 3 回以上連続して出る。

II . 数直線の原点上にある点が、以下の規則で移動する試行を考える。

(規則) さいころを振って出た目が奇数の場合は、正の方向に 1 移動し、出た目が偶数の場合は、負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の、点の座標を $X(k)$ とする。

- (1) $X(10) = 0$ である確率を求めよ。
- (2) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(5) \neq 0$ であって、かつ、 $X(6) = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(9) \neq 0$ であって、かつ、 $X(10) = 0$ となる確率を求めよ。

III . 2 つのチーム S と T が野球の試合を繰り返し行い、先に 4 勝したチームを優勝とする。第 1, 2, 6, 7 戦は S のホームゲームであり、第 3, 4, 5 戦は T のホームゲームである。S のホームゲームで S が勝つ確率は $\frac{3}{5}$ であり、T のホームゲームで T が勝つ確率は

$\frac{5}{6}$ とする。各試合で引き分けはないものとするとき、次の問いに答えよ。

- (1) どちらかの優勝が決まるまでに S が 1 勝以上する確率を求めよ。
- (2) T のホームゲームで T が優勝する確率を求めよ。
- (3) 第 1, 2 戦とも S が勝ち、かつ S が優勝する確率を求めよ。

7 [I . 豊橋技術科学大 II . 東京海洋大]

I . 白球 5 個と赤玉 4 個が入った袋がある。この袋から 1 球を取り出す。それが白球であれば、取り出した白球にさらに 2 個の白球を加えてもとの袋に戻す。取り出した球が赤球であれば、2 個の赤球を加えてもとの袋に戻す。2 回目および 3 回目も同様に、白球が取り出されれば 2 個の白球を追加し、赤球が取り出されれば 2 個の赤球を追加してもとに戻す。

- (1) この 3 回の操作の過程で、白球が 2 回、赤球が 1 回取り出される確率を求めよ。
- (2) 3 回目に取り出された球が白球である確率を求めよ。

高3数学 標準問題演習 演習 13. 確率

Ⅱ. 4つのさいころを同時に投げるとき、

- (1) 出る目の最大値が4となる確率を求めよ。
- (2) 出る目の最大値が5かつ最小値が2となる確率を求めよ。
- (3) 出る目の最大値と最小値の差が3という条件のもとで、3の目が少なくとも1つ出る条件付き確率を求めよ。

8 [Ⅰ. 2021 成蹊大 Ⅱ. 2018 新潟大]

Ⅰ. ある感染症の検査について、感染していると判定されることを陽性といい、また、感染していないと判定されることを陰性という。そして、ここで問題にする検査では、感染していないのに陽性(偽陽性)となる確率が10%あり、感染しているのに陰性(偽陰性)となる確率が30%ある。全体の20%が感染している集団から無作為に1人を選んで検査するとき、次の(1)～(5)の空欄 に適する答えを求めよ。なお、(1)～(4)では、1回だけこの検査を行うものとする。

(1) 検査を受ける者が感染していない確率は $\frac{\overset{\text{ア}}{\boxed{}}}{\underset{\text{イ}}{\boxed{}}}$ である。

(2) 検査を受ける者が感染しており、かつ陽性である確率は $\frac{\overset{\text{ウ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{エ}}{\boxed{}}}$ である。

(3) 検査を受ける者が陽性である確率は $\frac{\overset{\text{オ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{カ}}{\boxed{}}}$ である。

(4) 検査の結果が陽性であった者が実際に感染している確率は $\frac{\overset{\text{キ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{ク}}{\boxed{}}}$ である。

(5) 1回目の検査で陰性であった者に対してのみ、2回目の検査を行うものとする。このとき、1回目または2回目の検査で陽性と判定された者が、実際には感染していな

い確率は $\frac{\overset{\text{ケ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{コ}}{\boxed{}}}$ である。

高3数学 標準問題演習 演習 13. 確率

Ⅱ. 袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個, 袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず, 袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し, 玉の色は確認せず, そのまま袋 B に入れ, よくかき混ぜて, 袋 B から 2 個の玉を同時に取り出す。

- (1) 袋 A から取り出された 3 個の玉が, 赤玉 1 個と白玉 2 個である確率, 白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。
- (3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき, 袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。

9 [Ⅰ. 京都大 Ⅱ. 2001 一橋大 Ⅲ. 山形大]

Ⅰ. (1) さいころを 1 回または 2 回振り, 最後に出た目の数を得点とするゲームを考える。1 回振って出た目を見た上で, 2 回目を振るか否かを決めるのであるが, どのような決めるのが有利であるか。

(2) 上と同様のゲームで, 3 回振ることも許されるとしたら, 2 回目, 3 回目を振るか否かの決定は, どのようにするのが有利か。

Ⅱ. 1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある。ただし, $n \geq 2$ とする。

- (1) この n 枚のカードから一度に 2 枚選び, 大きい方の数字を X とする。 X の期待値 E_1 を求めよ。
- (2) この n 枚のカードから 1 枚選び, その数字を X_1 とする。そのカードをもとに戻し, あらためて 1 枚選び, その数字を X_2 とする。 X_1 と X_2 の小さい方の数字を Y とする。 Y の期待値 E_2 を求めよ。

Ⅲ. n 人 ($n \geq 2$) が全員同時に 1 回だけジャンケンをする。

- (1) m 人 ($1 \leq m \leq n-1$) が勝つ確率を求めよ。
- (2) 次の式を証明せよ。

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$

$${}_nC_1 + 2{}_nC_2 + \cdots + n{}_nC_n = n2^{n-1}$$

- (3) (2)を用いて, 勝負がつかない確率を求めよ。
- (4) (2)を用いて, 勝つ人の数の期待値を求めよ。

高3数学 標準問題演習 演習 13. 確率

10 [2019 早稲田大]

赤玉 4 個，白玉 11 個が入っている袋がある。この袋から玉を 1 個取り出してもとに戻すことを n 回繰り返すとき，ちょうど 3 回赤玉を取り出す確率を p_n とする。このとき，

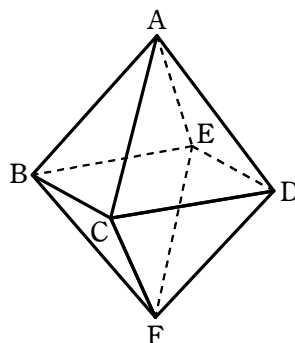
$$n \geq 4 \text{ において， } \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\text{ア} \boxed{} n}{\text{イ} \boxed{} n - \text{ウ} \boxed{}} \text{ であり， } p_n \text{ を最大にする } n \text{ の値は}$$

エ $\boxed{}$ である。

11 [I. 1999 一橋大 II. 2000 名古屋市立大 III. 2024 早稲田大]

I. 2 つの箱 A, B のそれぞれに赤玉が 1 個，白玉が 3 個，合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤玉が 1 個，白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。

II. 図のような正八面体 ABCDEF がある。動点 P は最初，頂点 A 上にあるが，1 回の操作で 1 辺を伝わり最も近い他の頂点に移動させる。1 回の操作で，最も近い頂点の中でどの頂点に移動させるかは無作為に決める。この操作を繰り返し，点 P を移動させていく場合， n 回の操作が完了した時点で点 P が頂点 A, B, C, D, E, F にある確率をそれぞれ $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ とする。



(1) 数学的帰納法により， $b_n = c_n = d_n = e_n$ ($n \geq 1$) を示せ。

(2) a_{n+1}, f_{n+1} を b_n で表し，また，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(3) a_n, b_n, f_n を求めよ。

III. 2 つのチーム W, K が n 回試合を行う。ただし， $n \geq 2$ とする。各試合での W, K それぞれの勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし，引き分けはないものとする。W が連敗しない確率を p_n とする。ただし，連敗とは 2 回以上続けて負けることをいう。

(1) p_3 を求めよ。

(2) p_{n+2} を p_{n+1} と p_n を用いて表せ。

(3) 以下の 2 式を満たす α, β を求めよ。ただし， $\alpha < \beta$ とする。

$$p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n), \quad p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$$

(4) p_n を求めよ。