

高3理系数学 発展問題演習 演習 10. 体積(1)

1 [I . 2005 東京大 II . 2002 京都府立医科大]

I . r を正の実数とする。 xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad y^2 + z^2 \geq r^2, \quad z^2 + x^2 \leq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。

II . n は 2 以上の整数とする。

xyz 座標空間において, xy 平面上に, 次で定められた n 本の直線 $g_1, g_2, \dots, g_n$ がある。

$$g_k : x \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) + y \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = 0, \quad z = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

n 本の直線 $g_1, g_2, \dots, g_n$ を中心軸にもち, 半径 a の n 本の円柱の内部の共通部分を K_n とし, その体積を V_n とする。

(1) $n=2$ のときの立体図形 K_2 の $z \geq 0$ の部分の概形を描け。

(2) 体積 V_n を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ を求めよ。

2 [2012 東京工業大]

xyz 空間に 4 点 $P(0, 0, 2)$, $A(0, 2, 0)$, $B(\sqrt{3}, -1, 0)$, $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$ をとる。

四面体 $PABC$ の $x^2 + y^2 \geq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。

3 [2017 大阪大]

xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を, y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち, xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0 \leq t \leq 2$ を満たす実数とする。 xy 平面上の点 $(0, t)$ を通り, y 軸に直交する平

面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。 $t = (2\cos\theta)^2 \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ のとき, $S(t)$

を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。

高3理系数学 発展問題演習 演習 10. 体積(1)

4 [I . 2018 上智大 II . 2013 東京大]

I . 座標空間において、原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円が xy 平面上にある。この円を底面とし、 $A(0, 0, \sqrt{2})$ を頂点とする円錐を考える。A と底面の円周上の点 $B(-\sqrt{2}, 0, 0)$ を結ぶ線分 AB の中点を C とする。点 P は線分 CA 上を動き、 $CP=a$ とする。P を通り線分 AB と垂直に交わる平面でこの円錐を切ったときの断面積を $S(a)$ とする。

(1) $S(0) = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \sqrt{\text{ウ}} \text{である。}$

(2) $S(a)$ は $a = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\text{カ}}$ をとる。

(3) C を通り線分 AB と垂直に交わる平面で円錐を2つの立体に分けると、頂点 A を含む方の立体の体積は

$$\frac{\text{キ}}{\text{ク}} \sqrt{\text{ケ}} + \frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}} \pi$$

である。

II . 座標空間において、 xy 平面内で不等式 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ により定まる正方形 S の4つの頂点を $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を、直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1 , 直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0 \leq t < 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

高3理系数学 発展問題演習 演習 10. 体積(1)

5 [I . 2002 上智大 II . 2017 慶応義塾大]

I . 座標空間で考える. xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を y 軸の周りに 1 回転してできる曲面を K とし, 点 $(0, \frac{1}{4}, 0)$ および点 $(\frac{-1}{4\sqrt{3}}, 0, 0)$ を通り xy 平面に垂直な平面を H とする. 更に曲面 K と平面 H によって囲まれる立体を V とする.

- (1) 立体 V と平面 $z = t$ との共通部分の面積 $S(t)$ を t の式で表せ.
- (2) 立体 V の体積を求めよ.

II . xyz 空間の zx 平面にある曲線 $z = x^2$ の, $0 \leq z \leq h$ に対する部分を C とする. ただし $h > 0$ である. 回転軸 ℓ を z 軸にとり, C を ℓ の周りに 1 回転させて得られる曲面からなる容器を S とする. S に水を満たした後, S の回転軸 ℓ を z 軸に対して角 θ だけ傾ける. 以下 $a = \tan \theta$ とおく.

- (1) 水がすべてこぼれず, 容器の中に残るための条件は $0 \leq a < \boxed{}$ である. このと

き空気に触れている水面の面積を $T(a)$ とすると $T(a) = \boxed{}$ である.

$\lim_{a \rightarrow +0} T'(a) = \boxed{}$ であり, a の関数 $T(a)$ が $0 < a < \boxed{}$ の範囲に極大値をも

つための条件は $h > \boxed{}$ である.

- (2) $a = \sqrt{h}$ のとき容器に残った水の体積 V を求めると $V = \boxed{}$ である. ただしその計算にあたって必要ならば次の定積分の値を用いてよい.

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{3\pi}{128}, \quad \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{16}$$

6 [東京理科大]

次の各問に答えよ. ただし, だ円 $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ (a, b は正の定数, u, v は変数) の面積は πab である.

(1) F は空間における平面上の図形である. F の xy 平面上への正射影は半径 r の円の周および内部であり, yz 平面上への正射影は線分で, その線分の延長と y 軸とのなす角は θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) である. このとき, 図形 F の形は であり, F の面積は である.

(2) G は空間における立体図形であって, $x^2 + y^2 \leq z$ を満たす点 (x, y, z) の集合とする.

(a) 平面 $2y + z = t$ が, G と共有点をもつような t の範囲を求めよ. また, この平面による G の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ.

(b) 2 平面 $2y + z = t$ および $2y + z = t + \Delta t$ が G と交わるとき, G のこの 2 平面の間にある部分の厚さを求めよ.

(c) G のうち $2y + z \leq 4$ を満たす部分の体積 V を求めよ.

7 [2019 富山大]

(1) 平面上の, 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える. 点 P が正方形 ABCD の辺の上を 1 周するとき, 点 P を中心とする半径 r の円 (内部を含む) が通過する部分の面積 $S(r)$ を求めよ.

(2) 空間内の, 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える. 点 P が正方形 ABCD の辺の上を 1 周するとき, 点 P を中心とする半径 1 の球 (内部を含む) が通過する部分の体積 V を求めよ.

8 [京都大]

座標空間において, 平面 $z=1$ 上に 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある. 点 A, B, C から平面 $z=0$ に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする. 動点 P は A から B の方向へ出発し, 一定の速さで $\triangle ABC$ の周を 1 周する. 動点 Q は同時に E から F の方向へ出発し, P と同じ一定の速さで $\triangle DEF$ の周を 1 周する. 線分 PQ が通過してできる曲面と $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ によって囲まれる立体を V とする.

(1) 平面 $z=a$ ($0 \leq a \leq 1$) による V の切り口はどのような図形か.

(2) V の体積を求めよ.

9 [I. 東京大 II. 名古屋市立大]

I. xyz 空間において, 不等式

$$0 \leq z \leq 1 + x + y - 3(x - y)y, 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y + 1$$

のすべてを満足する x, y, z を座標にもつ点全体がつくる立体の体積を求めよ.

II. xyz 空間で, 不等式 $0 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1, 0 \leq z \leq xy$ を満たす点 (x, y, z) からなる立体の体積 V を求めよ.