高3理系数学　発展問題演習　11. 体積(2)

$\boxed{1}$ [東京大]

正四面体 T と半径 1 の球面 S とがあって，T の 6 つの辺がすべて S に接しているという．T の 1 辺の長さを求めよ．次に T の外側にあって S の内側にある部分の体積を求めよ．

$\boxed{2}$ [2015 東京工業大]

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1)　A の体積 V を求めよ。

(2)　点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds$$

を示せ。

(3)　不等式

$$\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx$$

を示せ。

$\boxed{3}$ [2014 大阪大]

半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径をもつ n 個 $(n\geqq 3)$ の球 T_1，T_2，……，T_n があり，次の条件 (A)，(B) を満たす。

(A)　T_i は S_1，S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$。

(B)　T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している。

(1)　T_1，T_2，……，T_n の共通の半径 r_n を求めよ。

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線の周りに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1，T_2，……，T_n の 体積の和を W_n とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。

高3理系数学　発展問題演習　11. 体積(2)

$\boxed{4}$［1997 東京医科歯科大］

座標平面上の曲線 C：$y=2x^2-x^4$ $(y \geqq 0)$ および直線 l：$y=a$ (a は $0<a<1$ を満たす定数)を考える．このとき，

(1)　曲線 C と直線 l の交点をすべて求めよ．

(2)　曲線 C と直線 l で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の部分を K_1，$y \leqq a$ の部分を K_2 とする．このとき $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ を y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V_1, V_2 をそれぞれ求めよ．

(3)　$V_1=V_2$ となるような a の値を求めよ．

$\boxed{5}$［日本医科大］

放物線 $y=x^2-nx$ と直線 $y=mx$ とで囲まれる部分を D_n とする．ただし， n, m は $n>1, m>0, n>m, n>\dfrac{1}{m}$ を満たす実数の定数とする．

(1) D_n を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_n の値を， n, m を用いて表せ．

(2) D_n を直線 $y=mx$ のまわりに回転してできる回転体の体積 W_n の値を， n, m を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{W_n}$ の値を， m を用いて表せ．

$\boxed{6}$［2020 東京工業大］

n を正の奇数とする。曲線 $y=\sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする。直線 $x+y=0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする。

(1)　$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく。また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする。線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ。

(2)　(1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ。

7 [2012 お茶の水女子大]

半径2の円板が x 軸上を正の方向に滑らずに回転するとき，円板上の点Pの描く曲線 C を考える。円板の中心の最初の位置を $(0,\ 2)$，点Pの最初の位置を $(0,\ 1)$ とする。

(1)　円板がその中心の周りに回転した角を θ とするとき，Pの座標は $(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ で与えられることを示せ。

(2)　点 $\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ における曲線 C の法線と x 軸との交点を Q とする。線分 PQ の長さが最大となるような点Pを求めよ。ここで，Pにおいて接線に直交する直線を法線という。

(3)　曲線 C と x 軸，2直線 $x=0$，$x=4\pi$ で囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

8 [2003 九州大]

xy 平面上で，

$$x=r(t)\cos t,\quad y=r(t)\sin t\ (0\leqq t\leqq\pi)$$

で表される曲線を C とする．

(1)　$r(t)=e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ．

(2)　一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt=\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\left(\sin^3 t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt$$

が成り立つことを示せ．ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である．

(3)　(1)で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V は

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}e^{-3t}\sin t\,dt$$

と表せることを示せ．