

初等幾何 2. 19の性質

32

$$\angle ABD = \alpha^\circ \text{ とする}$$

$$\angle ACD = \alpha^\circ \text{ (A, C に対する同位角)}$$

$$\angle AEH = \angle MEC = \alpha^\circ$$

$$\angle MCE = \angle MEC \text{ より } MC = ME \dots \textcircled{1} \text{ とおく}$$

$$\angle BAC = \beta^\circ \text{ とする}$$

$$\angle BDC = \beta^\circ \text{ (B, C に対する同位角)}$$

$$\angle BEH = \angle MEP = \beta^\circ$$

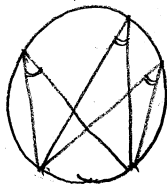
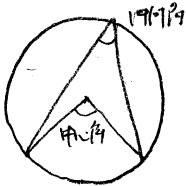
$$\angle MDE = \angle MED \text{ より } MD = ME \dots \textcircled{2}$$

①, ② より

$$MC = MD \text{ 〇}$$

<point>

1. 19の性質の定理



(同位角) 〇 〇 〇 〇

(対角の弧) 〇 〇 〇 〇
(同位角) 〇 〇 〇 〇

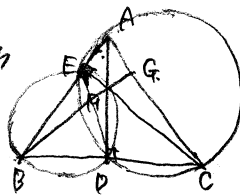
33

$$d) \angle BDF = \angle BEF = 90^\circ \text{ と仮定}$$

$$\angle BDF + \angle BEF = 180^\circ$$

19の性質 19の性質 19の性質

19の性質 〇



$$e) \angle ABC = \angle AEC \text{ と仮定}$$

(同位角の定理) 〇

(同位角) AEDC 〇 〇 〇 〇

$$b) \triangle ABG \text{ と } \triangle ACE \text{ において}$$

$$\angle BAG = \angle CAE \text{ (共通角)} \dots \textcircled{1}$$

$$\angle ABG = \angle ACE \text{ (EF に対する同位角)}$$

$$\angle ACE = \angle ADE \text{ (AE ") 〇 〇 〇 〇}$$

$$\angle ABG = \angle ADE \dots \textcircled{2}$$

①. ② から 〇 〇 〇 〇 〇 〇

$$\triangle ABG \sim \triangle ACE \text{ 〇}$$

$$a) b) \text{ より } \angle AGF = 90^\circ$$

$$\angle AEF + \angle AGF = 180^\circ$$

19の性質 AEF, G 〇 〇 〇 〇 〇 〇

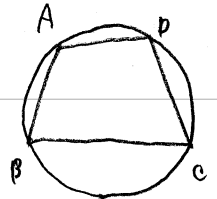
<point>

1. 19の性質の定理

19の性質 ABCD 〇 〇 〇 〇

19の性質

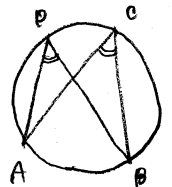
〇 〇 〇 〇 〇 〇



2. 19の性質の定理

$$\angle ACB = \angle ADB$$

⇒ A, B, C, D は同一円周上に
ある



34

(図のように T における 19の性質)

E, U, C, V をおく

$\triangle TCS$ と $\triangle TSB$ において

$$\angle TCS = \angle TSB \text{ (接弦定理)}$$

$$\angle TSC = \angle TBS = \angle UTA \text{ (〇 〇)}$$

〇 〇 〇 〇 〇 〇

$$\triangle TCS \sim \triangle TSB$$

よって

$$\angle TCS = \angle TBS \text{ 〇}$$

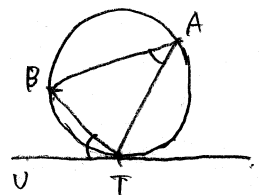
<point>

1. 接弦定理

直線 UT が 19の T における

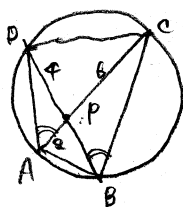
接弦

$$\Leftrightarrow \angle TAB = \angle BTU$$



[99]

$\angle BAC = \angle CBD$ であるから
 円周角の定理の逆より
 四角形 $ABCD$ は円に内接
 する



たがいの定理より

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD$$

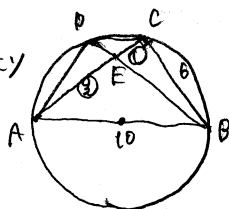
$$2 \cdot 6 = 4PB \quad \therefore PB = 3$$

よって

$$BD = PB + PD = 7.4$$

[40]

$\angle ACB = 90^\circ$ であるから $AC = 8$ より
 $AE = 6, CE = 2$



よって

$$BE = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

たがいの定理より

$$DE \cdot 2\sqrt{10} = 6 \cdot 2$$

$$\therefore DE = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

よって

$$\frac{BE}{DE} = \frac{2\sqrt{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{5}} = \frac{10}{3}$$

$$\triangle ABE \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{3}{4} = 18$$

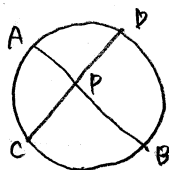
$$\triangle CDE = 18 \times \frac{1^2}{9^2} = 2$$

<point>

1. たがいの定理 1.

A, B, C, D は同一円周上にあり

$$\Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



[49]

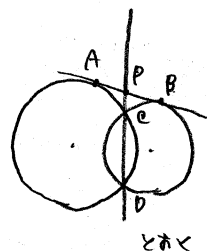
1. たがいの定理より

$$PA^2 = PC \cdot PD \quad \dots ①$$

$$PB^2 = PC \cdot PD \quad \dots ②$$

①, ②より

$$PA^2 = PB^2 \quad \therefore PA = PB \text{ となる}$$



2. たがいの定理より

$$PA \cdot PB = PT^2 \quad \dots ①$$

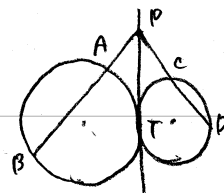
$$PC \cdot PD = PT^2 \quad \dots ②$$

①, ②より

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

たがいの定理の逆より

A, B, C, D は同一円周上にあり



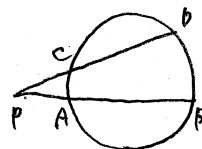
となる

<point>

2. たがいの定理より

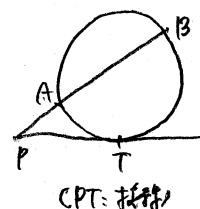
A, B, C, D は同一円周上にあり

$$\Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



右図のようにとる

$$PA \cdot PB = PT^2$$



CPT: 接線

[46]

1. $\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ において

$$\angle APB = \angle CPD \text{ (対頂角)} \quad \dots ①$$

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC \text{ より}$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} \quad \dots ②$$

①, ②より二角の夾角相等より

$$\triangle PAB \sim \triangle PCD$$

$$\angle PAB = \angle PCD \text{ より}$$

四角形 $ABCD$ は同一円周上にあり

②) (A), (B) ⊂ Y

$$\angle AEP = 180^\circ - \angle AFP$$

$$\angle CEP = 180^\circ - \angle CBP$$

また

$$BF \cdot BA = BP \cdot BE \dots ①$$

$$BD \cdot BC = BP \cdot BE \dots ②$$

①, ②より

$$BF \cdot BA = BD \cdot BC$$

よって、Yの性質は AFBCに1つに当てはまる

$$\therefore \angle AFP = \angle CBP$$

よって

$$\angle AEP = \angle CEP = 90^\circ$$

これより

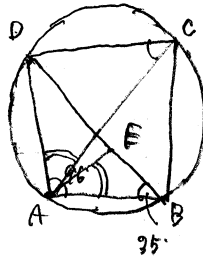
$$\angle AFP = \angle CBP = 90^\circ$$

よって Pは△ABCの垂心である。□

[48]

$$d) \angle ACB = \angle ADB$$

$$= (180^\circ - (96^\circ + 35^\circ)) = 49^\circ //$$



③) △APEと△ACDについて

$$\angle PAE = \angle CAD \text{ (共通角)}$$

$$\angle APE = \angle ACD \text{ (ABに2点A, Pが1点を通る)}$$

これより相似である

$$\triangle APE \sim \triangle ACD$$

よって

$$\frac{AP}{AC} = \frac{PE}{CD}$$

$$\therefore AP \cdot CD = AC \cdot PE \quad \square$$

③) ②)と同じ:

$$\triangle AED \sim \triangle ABC \text{ より}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

$$\therefore AD \cdot BC = AC \cdot ED$$

よって

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

$$= AC(BE + ED)$$

$$= AC \cdot BD \quad \square$$

<point>

1. トーリスの定理

③) をトーリスの定理という

(対辺の長いの積の和 = 対角線の長いの積)

↑
四角形が円に内接するとき

[49]

正五角形は円に内接する

対角線の長さを x とおくと

トーリスの定理より

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

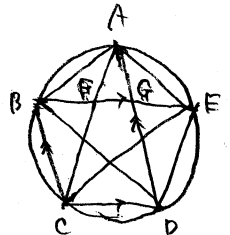
$$1 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (x > 0)$$

$$BF = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$FG = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} //$$



$$r^2 = h^2 + (r-h)^2$$

ΔΟΚΟΨ. 4

$$7^2 = 9^2 + (r+r')^2$$

①. ② 4/

$$r = \sqrt{10 + \sqrt{6}}, \quad r' = \sqrt{10 - \sqrt{6}}$$

$$AR = \alpha \text{ と } \beta \text{ と}$$

$$PR = x, BR = 5-x, OR = 5-x$$

PR = 3 1/2

$$X - (K - \alpha) = 0$$

$$2x = 8 \quad \therefore x = \boxed{4}$$

$\langle \text{point} \rangle$

1. ১৭০১ চন