標準問題演習 18. 複素数平面(2)

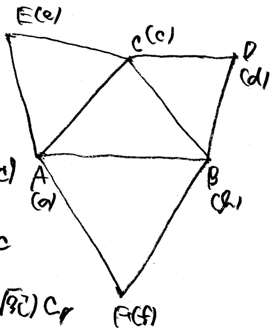
[1]

(1) dはbをcを中心に60°回転したものより

$d-c=(\cos 60°+i\sin 60°)(b-c)$

$\therefore d=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(b-c)+c$

$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)b+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)c$ //



(2) 同様に

$e=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)c+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)a$

$f=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)a+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)b$

$d+e+f=a+b+c$ //

(3) $\frac{d+e+f}{3}=\frac{a+b+c}{3}$ より

△DEFと△ABCの重心は一致する.

<point>

1. 複素数平面上の分点公式

[2]

(1) $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$

両辺β^2で割って

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\frac{\alpha}{\beta}+1=0$

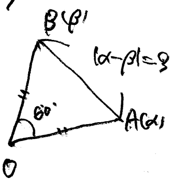
$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $\frac{\alpha}{\beta}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ より

$\angle AOB=60°$, $|\alpha|=|\beta|$

△OABは正三角形より

$|\alpha|=3$ //



(3) △OABの面積Sは

$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin 60°=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ //

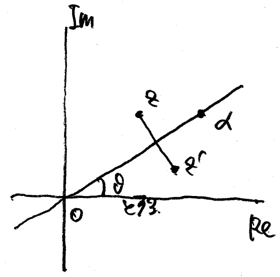
[3]

z'は

zを$-\theta$回転し (z_1)

共役複素数をとって (z_2)

θ回転したものである



$\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)$

$z_1=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}z$

$z_2=\overline{\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}z}$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)\bar{z}$

$z'=(\cos\theta+i\sin\theta)^2\bar{z}$

ここで $\cos\theta+i\sin\theta=\frac{\alpha}{|\alpha|}$ より

$z'=\frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}\bar{z}$

$=\frac{\alpha^2}{\alpha\bar{\alpha}}\bar{z}$ $\therefore \bar{\alpha}z'=\alpha\bar{z}$

$\bar{\alpha}z'=\alpha\bar{z}$ のとき

$\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)$として

両辺$(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$をかけて

左辺$=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)z'\cdot(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$=|\alpha|z'$

右辺$=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)\bar{z}\cdot(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$=|\alpha|\bar{z}$

$\therefore z'=\bar{z}$

zとz'は直線$O\alpha$に関して対称である //

<point>

1. 対称移動

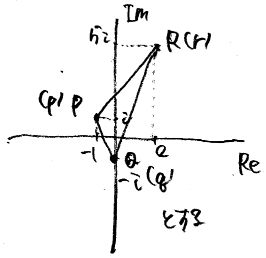
[4]

I. $PQ=|p-q|$

$=|-1+2i|=\boxed{\sqrt{5}}$

$QR=|r-q|$

$=|2+6i|=\sqrt{40}=\boxed{2\sqrt{10}}$



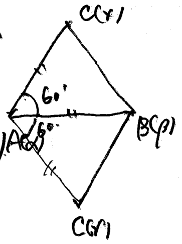
$\angle PQR=\arg\frac{p-q}{r-q}$

$=\arg\frac{-1+2i}{2+6i}=\arg\frac{10+10i}{40}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

△PQRの面積Sは

$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}\cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{5}$

Ⅱ. (i) Cは BをAを中心に60°回転したものであるから



$\beta-\alpha=(\cos(\pm60^\circ)+i\sin(\pm60^\circ))(\gamma-\alpha)$

$\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^3=-1$

$(\beta-\alpha)^3+(\gamma-\alpha)^3=0$

$(\beta+\gamma-2\alpha)\{(\beta-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2\}=0$

$\beta+\gamma-2\alpha\neq0$ より ($\beta+\gamma-2\alpha=0$ とすると $\alpha=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ より α は β と γ の中点となり不適)

$(\beta-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2=0$

∴ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ □

(ii) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$

$(\beta-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2=0$

$\alpha=\beta$ のとき

$(\gamma-\alpha)^2=0$ ∴ $\gamma=\alpha$

よって A=B=C

$\alpha\neq\beta$ のとき

両辺 $(\beta-\alpha)^2$ で割って

$\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+1=0$

∴ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$=\cos(\pm60^\circ)+i\sin(\pm60^\circ)$

$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ ∴ $|\gamma-\alpha|=|\beta-\alpha|$

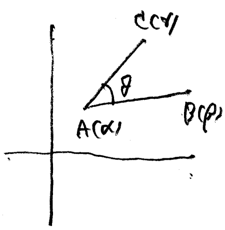
AC=AB

$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm60^\circ$ ∴ ∠BAC=60°

より △ABC は正三角形 □

<point>

$\angle BAC=\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$



[5]

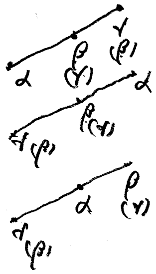
Ⅰ. (1) α, β, γが同一直線上にあるとき

(i) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos0+i\sin0)$

$=r$(実数)

(ii) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos(\pm\pi)+i\sin(\pm\pi))$

$=-r$(実数)



(2) $\alpha=-1,\ \beta=iz,\ \gamma=z^2$ として

$\overline{\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

$\overline{\left(\dfrac{z^2+1}{iz+1}\right)}=\dfrac{z^2+1}{iz+1}$

$\dfrac{(\bar z)^2+1}{-i\bar z+1}=\dfrac{z^2+1}{iz+1}$

$\{(\bar z)^2+1\}(iz+1)=(z^2+1)(-i\bar z+1)$

$i|z|^2\bar z+(\bar z)^2+iz+1=-i|z|^2z+z^2-i\bar z+1$

$i|z|^2(\bar z+z)+(\bar z)^2-z^2+i(\bar z+z)=0$

$(\bar z+z)(i|z|^2+\bar z-z+i)=0$

$z\bar z$

$(\bar z+z)(z\bar z-i\bar z+iz+1)=0$

$(\bar z+z)(z-i)(\bar z+i)=0$

∴ $\bar z=-z,\ z=\pm i$

zは純虚数 または 0

Ⅱ. $\dfrac{(3+ti)-(1+i)}{(5-i)-(1+i)}$ が純虚数になればよいから

$=\dfrac{\{2+(t-1)i\}}{4-2i}$

$=\dfrac{10-2t+4ti}{20}$

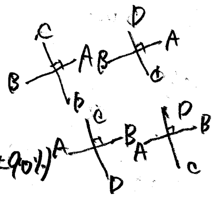
$10-2t=0$ かつ $4t\neq0$ ∴ $t=5$

<point>

1. 共線条件、垂直条件

[6]

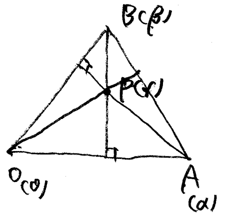
I. (1) ABとCDが直交するとき



$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} = r(\cos(\pm 90°)+i\sin(\pm 90°)) \quad (r\neq 0)$$

$$=\pm ri$$

(2) AP⊥OBより



とする

$$\overline{\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\right)} = -\frac{\gamma-\alpha}{\beta} \cdots ①$$

BP⊥OAより

$$\overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{\alpha}\right)} = -\frac{\gamma-\beta}{\alpha} \cdots ②$$

①より

$$\beta(\bar\gamma-\bar\alpha) = -\bar\beta(\gamma-\alpha)$$

$$\beta\bar\gamma-\bar\alpha\beta+\bar\beta\gamma-\alpha\bar\beta=0 \cdots ③$$

②より

$$\alpha(\bar\gamma-\bar\beta)=-\bar\alpha(\gamma-\beta)$$

$$\alpha\bar\gamma-\alpha\bar\beta+\bar\alpha\gamma-\bar\alpha\beta=0 \cdots ④$$

④−③より

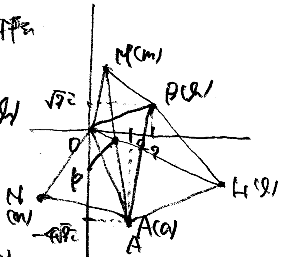
$$\alpha\bar\gamma-\beta\bar\gamma+\bar\alpha\gamma-\bar\beta\gamma=0$$

$$\bar\gamma(\alpha-\beta)=-\gamma(\bar\alpha-\bar\beta)=0$$

$$\therefore \overline{\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)} = -\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

(1)より OP⊥AB □.

II. (1) L(l)はAをBを中心に60°回転したものより



$$l-b=(\cos60°+i\sin60°)(a-b)$$

$$l=\frac12(1+\sqrt3 i)(-1-5\sqrt3 i)+(3+\sqrt3 i)$$

$$=\frac12(14-6\sqrt3 i)+(3+\sqrt3 i)$$

$$=10-2\sqrt3 i$$

M(m)は

$$m=(\cos60°+i\sin60°)b$$

$$=\frac12(1+\sqrt3 i)(3+\sqrt3 i)$$

$$=\frac12(4\sqrt3 i)=2\sqrt3 i$$

N(n)は

$$n=\{\cos(-60°)+i\sin(-60°)\}a$$

$$=\frac12(1-\sqrt3 i)(2-4\sqrt3 i)$$

$$=\frac12(-10-6\sqrt3 i)=-5-3\sqrt3 i$$

(2) O, P, Lは一直線上にあるから

P(p)は

$$p=kl=k(10-2\sqrt3 i) \quad (k:\text{実数})$$

とおける。

A, P, Mは一直線上にあるから

$\frac{p-m}{a-m}$が実数になればよいから

$$\frac{p-m}{a-m}=\frac{5k-(k-1)\sqrt3 i}{1-3\sqrt3 i}(1+3\sqrt3 i)$$

$$=\frac{14k+9+(14k-1)\sqrt3 i}{28}$$

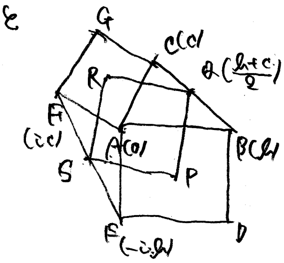
$$14k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{14}$$

$$\therefore p=\frac{5+\sqrt3 i}{7}$$

(3) $\frac{p-n}{b-n}=\frac27$が実数であるから

B, P, Nは一直線上にある □.

III. A(0), B(b), C(c)とすると



$$P\left(\frac{1-i}{2}b\right)$$

$$Q\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$R\left(\frac{1+i}{2}c\right)$$

$$S\left(\frac{c-b}{2}i\right)$$

$$\frac{r-s}{p-s}=\frac{\frac{1+i}{2}c-\frac{c-b}{2}i}{\frac{1-i}{2}b-\frac{c-b}{2}i}=\frac{\frac{b}{2}i+\frac12 c}{\frac{b}{2}-\frac{i}{2}c}=i$$

より SP=SR, ∠PSR=90°

S, Qの中点は $\left(\frac12\left(\frac{b+c}{2}+\frac{c-b}{2}i\right)\right)$

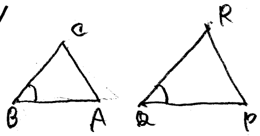
PR 〃 $\left(\frac12\left(\frac{b+c}{2}+\frac{c-b}{2}i\right)\right)$

2対角線の中点が一致するので 四角形PQRSは平行四辺形

よって 四角形PQRSは正方形 □

7

I. $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}$ より



$\frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}$

∴ $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}$ かつ

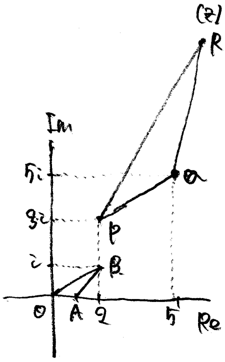
$\angle ABC=\angle PQR$

よって二辺の比と夾角相等より

$\triangle ABC \backsim \triangle PQR$ //

II. R(z)とする

I より



$\frac{z-(2+3i)}{3+2i}=2+i$

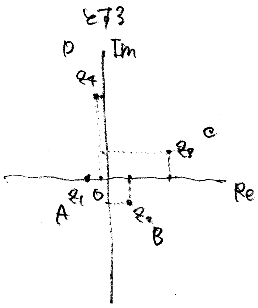
$z=(2+i)(3+2i)+2+3i$

$=4+7i+2+3i=6+10i$ //

<point>

1. 相似な条件

8.



$\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}=\frac{\frac{2}{3}+3i}{4+i}$ (4−i)

$=\frac{\frac{17}{3}+\frac{34}{3}i}{17}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

$\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}=\frac{-\frac{4}{3}+4i}{2+2i}$ (2−2i)

$=\frac{\frac{16}{3}+\frac{32}{3}i}{8}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i$

$=2\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}$

より 0, $\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}$, $\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}$ は一直線上にある

すなわち

$\arg\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}=\arg\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}$

∴ $\angle CAD=\angle CBD$

よって見込む角が等しいので

z_1, z_2, z_3, z_4 は同一円周上にある //

[別解]

(6+3i)

$\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\frac{2}{3}+3i}{2-i}=\frac{2+9i}{6-3i}=\frac{-15+60i}{45}=\frac{-1+4i}{3}$

$\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=\frac{-2-2i}{-\frac{10}{3}+2i}=\frac{3+3i}{5-3i}$ (5+3i)

$=\frac{3+12i}{17}$

$\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{17}(-1+4i)(1+4i)$

$=-1$

より $\arg\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}+\arg\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=180°$

∴ $\angle BAD+\angle DCB=180°$

より z_1, z_2, z_3, z_4 は同一円周上にある //

<point>

1. 共円条件

① 2つの見込む角(円周角)が等しい

② 対角の和が180°

9

(1) $z_{n+1}=(\cos60°+i\sin60°)z_n+2$

$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)z_n+2$ //

$\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\alpha+2$

$\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\alpha=2$

$\alpha=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

(2) $\alpha=1+\sqrt{3}i$, $\beta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ //

(3) $\{z_n-\alpha\}$ は初項 $z_0-\alpha=1-(1+\sqrt{3}i)=-\sqrt{3}i$

公比 β の等比数列より

$z_n-\alpha=-\sqrt{3}i\left\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right\}^n$

$z_n=\sqrt{3}\{\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})\}$

$(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})+1+\sqrt{3}i$

$=\sqrt{3}\{\cos(\frac{n}{3}-\frac{1}{2})\pi+i\sin(\frac{n}{3}-\frac{1}{2})\pi\}$

$+1+\sqrt{3}i$ //

(4) $z_{n+1}-\alpha=\beta(z_n-\alpha)$ より

z_{n+1} は z_n を α を中心として β だけ回転したもの

であるから z_n は

中心が $\alpha=1+\sqrt{3}i$

半径が $|z_0-\alpha|=|-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$

の円周上にある //

10

(1) $\{z_{k+1}-z_k\}$ は初項 $z_1-z_0=1$

公比 α の等比数列より

$z_{k+1}-z_k=\alpha^k$

よって

$z_k=z_0+\sum_{l=0}^{k-1}\alpha^l \quad (k\geqq 1)$

$=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{k-1} \quad (\alpha\neq 1)$

$=\dfrac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \quad (k\geqq 1)$

これは $k=0$ でも成り立つので

$z_k=\dfrac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$ //

(2) $\left|z_k-\dfrac{1}{1-\alpha}\right|=\dfrac{|\alpha|^k}{|1-\alpha|}$ より

$AP_0=AP_1=AP_2$ は

(3) 同様にて $P_0, P_1, \cdots, P_k$ は

中心が $\dfrac{1}{1-\alpha}$、半径が $\dfrac{1}{|1-\alpha|}$ の円周上にあるは.