

第2章 微分法

2.1 関数の極限

(1) $x \rightarrow a$ のときの関数の極限とその性質

関数 $f(x)=x^2$ において、 x が 2 と異なる値をとりながら 2 に限りなく近づくとき、 $f(x)$ は 4 に近づく。

一般に、関数 $f(x)$ において、変数 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、それに応じて $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づけば

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha, f(x) \rightarrow \alpha (x \rightarrow a)$$

と表す。この値 α を $x \rightarrow a$ のときの関数 $f(x)$ の極限值または極限といい、このとき、 $f(x)$ は α に収束するという。

上の関数 $f(x)=x^2$ については、 $x \rightarrow 2$ のときの極限值は 4 で

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4, x \rightarrow 2 \text{ のとき } x^2 \rightarrow 4, x^2 \rightarrow 4 (x \rightarrow 2)$$

と表す。

数列の場合と同様に、関数の極限について、次のことが成り立つ。

関数の極限の性質

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ とする}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \{kf(x) + lg(x)\} = k\alpha + l\beta \quad (k, l \text{ は実数})$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

この命題も、しっかり証明しようとするとき、 $\varepsilon - \delta$ 論法というものを用いて証明しなければならない。あえて証明するならば、

$$1 \text{ は, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \alpha| = 0, \lim_{x \rightarrow a} |g(x) - \beta| = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} |kf(x) + lg(x) - (k\alpha + l\beta)| &= \lim_{x \rightarrow a} |k\{f(x) - \alpha\} + l\{g(x) - \beta\}| \\
&\leq \lim_{x \rightarrow a} \{|k\{f(x) - \alpha\}| + |l\{g(x) - \beta\}|\} \quad (\text{三角不等式}) \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \{|k||f(x) - \alpha| + |l||g(x) - \beta|\} = 0
\end{aligned}$$

$|kf(x) + lg(x) - (k\alpha + l\beta)| \geq 0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow a} \{kf(x) + lg(x)\} = k\alpha + l\beta$$

が得られる。

(2) 極限の計算

x の整式で表される関数、分数関数、無理関数、三角関数、指数関数、対数関数などの関数 $f(x)$ については、 a が関数の定義域に属するとき、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つ。

関数 $f(x)$ が $x=a$ のとき定義されていなくても、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在することがある。例えば、

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x} \text{ は,}$$

$x=0$ のとき定義されない

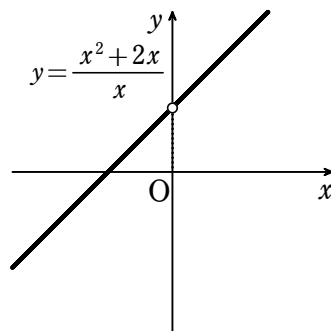
$x \neq 0$ のとき、 $f(x) = x + 2$

よって、 x が 0 とは異なる値をとりながら

0 に限りなく近づくとき、

$f(x)$ の極限值は存在して、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2$$



例1

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2}$ を求めよ.

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ を求めよ.

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}$ を求めよ.

解説

$$(1) \text{ 与式} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 与式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 与式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

別解 分母・分子に $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$ をかけて考えてもよい

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ((分母) $\rightarrow 0$) のとき

極限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (有限値) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ((分子) $\rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \alpha \cdot 0 = 0$$

← は成り立たない。反例は

$$f(x) = x - a, g(x) = (x - a)^2 \text{ など}$$

注

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ((分子) $\rightarrow 0$) のとき

極限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\neq 0$ の有限値) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ((分母) $\rightarrow 0$)

も成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \cdot f(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$$

例2

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3} - 8}{x-1}$ が有限な値になるように定数 a の値を定め、そのときの極限値を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - (ax+1)}{x} = 3$ が成り立つ定数 a は $a = \boxed{\quad}$ である。

解説

(1) 分母 $\rightarrow 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+3} - 8) = 0 \quad 2a - 8 = 0 \quad \therefore a = 4$$

が必要である

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3} - 8}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(\sqrt{x+3} - 2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt{x+3} + 2} = 1 \text{ となり有限な値になる} \end{aligned}$$

よって

$a = 4$, そのときの極限値は 1

$$(2) \frac{\sqrt{x^2+1} - (ax+1)}{x} = \frac{x^2+1 - (ax+1)^2}{x(\sqrt{x^2+1} + ax+1)} = \frac{(1-a^2)x - 2a}{\sqrt{x^2+1} + ax+1} \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - (ax+1)}{x} = \frac{-2a}{1+1} = -a = 3 \quad \therefore a = -3$$

(3) 極限が有限でない場合

関数 $f(x)$ の極限が有限な値でない場合について考える。

関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \infty, \quad f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow a)$$

と表す。

また、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が負で、その絶対値が限りなく大きくなるならば、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow -\infty, \quad f(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow a)$$

と表す。例えば,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

$f(x)$ が正の無限大に発散することを $f(x)$ の極限は ∞ であるともいい、 $f(x)$ が負の無限大に発散することを $f(x)$ の極限は $-\infty$ であるともいう。

(4) 関数の片側からの極限

関数 $f(x)$ において, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ のいずれでもない場合, $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はないという。

例えば, $f(x) = \frac{x^2 + x}{|x|}$ は

$x > 0$ のとき, $f(x) = x + 1$

$x < 0$ のとき, $f(x) = -x - 1$

$x > 0$ の範囲で x が 0 に限りなく近づくとき, $f(x)$ の値は 1 に限りなく近づき, $x < 0$ の範囲で x が 0 に限りなく近づくとき, $f(x)$ の値は -1 に限りなく近づく。

一般に, 変数 x が a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくとき, $f(x)$ の値が限りなく α に近づくなれば, α を x が a に近づくときの $f(x)$ の右側極限といい, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$ と表す。また, 変数 x が, a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくときの, $f(x)$ の左側極限も同様に定義され, その極限值が β ならば, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta$ と表す。

特に $a = 0$ の場合, $x \rightarrow 0+0, x \rightarrow 0-0$ をそれぞれ

$$x \rightarrow +0, x \rightarrow -0$$

と表す。この記号を用いると,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +0} (x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -0} (-x - 1) = -1$$

と表される。

このように, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ が存在しても, それらが一致しないとき, $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ の極限はない。

また,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

が成り立つ。

右側極限，左側極限が ∞ や $-\infty$ になる場合も同様に表す。例えば，

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

よって， $x \rightarrow 0$ のとき $\frac{1}{x}$ の極限はない。

例3

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{9-x^2}{\sqrt{(3-x)^2}} = \boxed{} \text{ である。}$$

$$\text{極限 } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3-1}{|x-1|} \text{ を求めよ。}$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{9-x^2}{\sqrt{(3-x)^2}} &= \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{(3-x)(3+x)}{|3-x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+0} \left\{ -\frac{(3-x)(3+x)}{3-x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+0} -(3+x) = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3-1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} -(x^2+x+1) = -3 \end{aligned}$$

例4

$$[a] \text{ は } a \text{ を超えない最大の整数を表すとするとき } \lim_{x \rightarrow 1-0} ([2x] - 2[x]) = \boxed{}$$

解説

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} ([2x] - 2[x]) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} [2x] - \lim_{x \rightarrow 1-0} 2[x] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} 1 - \lim_{x \rightarrow 1-0} 0 = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

(5) $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ のときの関数の極限

変数 x が限りなく大きくなることを $x \rightarrow \infty$ で表す。また、 x が負でその絶対値が限りなく大きくなることを $x \rightarrow -\infty$ で表す。このような場合の関数 $f(x)$ の極限について考える。

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ において、

$x \rightarrow \infty$ のとき、 $f(x)$ の値は 0 に限りなく近づき、

$x \rightarrow -\infty$ のとき、 $f(x)$ の値は 0 に限りなく近づく。

一般に、 $x \rightarrow \infty$ のとき、関数 $f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づく場合、この値 α を $x \rightarrow \infty$ のときの関数 $f(x)$ の極限值または極限といい、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ と表す。 $x \rightarrow -\infty$ のときも同様に考える。

この記号を用いると、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ の意味も、}$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ のときと同様に考える。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

例5

3 次関数 $f(x)$ が $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3 + 3}{x^2} = 4, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 3$ を満たすとき、

$f(x) = \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$ である。

解説

極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3 + 3}{x^2}$ が存在するから

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ とおける

このとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3 + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c+3}{x^2} \right) = a = 4 \quad \therefore a = 4$$

このとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 3$ において、分母 $\rightarrow 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 5\} = 0$$

であることが必要

$$c-5=0 \quad \therefore c=5$$

このとき

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2+4x+b) = b=3 \quad \therefore b=3$$

よって

$$f(x) = {}^{\text{ア}}2x^3 + {}^{\text{イ}}4x^2 + {}^{\text{ウ}}3x + {}^{\text{エ}}5$$

例6

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ を求めよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}+x)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1})$ を求めよ。

解説

- (1) $x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ より

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(-t)^2+(-t)+1}}{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}} \right) = -1 \end{aligned}$$

- (2) $x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ より

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2-t} - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2-t) - t^2}{\sqrt{t^2-t} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2-t} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}} + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (3) $x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ より

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2-t+1} - \sqrt{t^2+1}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2-t+1} + \sqrt{t^2+1}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = -\frac{1}{2}$$

例7

(1) a を実数とする。 $a = \sqrt[7]{\quad}$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} + ax)$ は有限な値 $\sqrt[4]{\quad}$ をとる。

(2) 定数 a, b に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{4x^2 + 5x + 6} - (ax + b)\} = 0$ が成り立つとき、 $(a, b) = \quad$ である。

解説

(1) $a \geq 0$ とすると、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} + ax) = \infty$ となるので、 $a < 0$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - a^2x^2}{\sqrt{4x^2 + x} - ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4 - a^2)x + 1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - a} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} + ax)$ が有限な値をとるためには、 $4 - a^2 = 0$

$a < 0$ より、 $a = -2$

このとき $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} = \frac{1}{4}$

よって、 $a = \sqrt[7]{-2}$ のとき、有限な値 $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$ をとる。

(2) $a \leq 0$ とすると、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{4x^2 + 5x + 6} - (ax + b)\} = \infty$ となるので、

$a > 0$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x + 6 - (ax + b)^2}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6} + (ax + b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4 - a^2)x^2 + (5 - 2ab)x + 6 - b^2}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6} + ax + b} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-a^2)x + (5-2ab) + \frac{6-b^2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + a + \frac{b}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + a + \frac{b}{x} \right) = 2 + a \quad (\neq 0) \text{ であるから,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \sqrt{4x^2 + 5x + 6} - (ax + b) \} = 0 \text{ のとき}$$

$$4 - a^2 = 0, \quad 5 - 2ab = 0$$

$$4 - a^2 = 0, \quad a > 0 \text{ より}$$

$$a = 2, \quad b = \frac{5}{4}$$

$$\text{よって, } (a, b) = \left(2, \frac{5}{4} \right)$$

関数の極限について、さらに次のことが成り立つ。

関数の極限と大小関係

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ とする}$$

1. x が a に近いとき、常に $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$

2. x が a に近いとき、常に $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha \quad (\text{はさみうちの原理})$$

この命題は、「 x が a に近いとき」を「十分大きい x で」として、 $x \rightarrow \infty$ の場合にも成り立つ。 $x \rightarrow -\infty$ の場合も同様である。

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ のとき、

十分大きい x で常に $f(x) \leq g(x)$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

も成り立つ。

例8

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3 \sin x}{2x + \sin x} \text{ をそれぞれ求めよ。}$$

解説

$-1 \leq \sin x \leq 1$ であるから, $x > 0$ のとき

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ であるから,

はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3\sin x}{2x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3 \cdot \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}$$