高3数学 標準問題演習 8. 三角関数

$\boxed{1}$

I. $t^2-(\sin\alpha+\sin\beta)t+\sin\alpha\sin\beta=0$ すなわち

$$t^2-\frac{5}{6}t+\frac{1}{6}=0$$

$$6t^2-5t+1=0 \qquad \begin{matrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{matrix}$$

の2解が $\sin\alpha, \sin\beta$ より

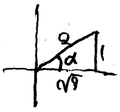
$$(2t-1)(3t-1)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$$

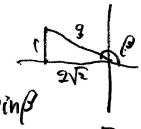
$$\therefore (\sin\alpha,\sin\beta)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$$

i) $(\sin\alpha,\sin\beta)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ のとき

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$





より

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$$

ii) $(\sin\alpha,\sin\beta)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

より

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$$

II.

(1) $\cos x+\cos y=1$ より

$$(\cos x+\cos y)^2=1$$

$$\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=1 \cdots ①$$

$\sin x+\sin y=\sqrt{2}$ より

$$(\sin x+\sin y)^2=2$$

$$\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y=2 \cdots ②$$

①+② より

$$2+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=3$$

$$\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos(x-y)=\frac{1}{2}$$

(2) $0<x-y<\frac{\pi}{2}$ より

$$x-y=\frac{\pi}{3} \qquad \therefore y=x-\frac{\pi}{3}$$

$\cos x+\cos y=1$ より

$$\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$$

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x=1$$

$$\therefore \sqrt{3}\sin x+3\cos x=2 \cdots ③$$

$\sin x+\sin y=\sqrt{2}$ より

$$\sin x+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$$

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{2}$$

$$\therefore 3\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{2} \cdots ④$$

③, ④ より

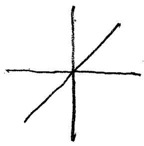
$$\cos x=\frac{3-\sqrt{6}}{6},\ \sin x=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

$$\cos y=\frac{3+\sqrt{6}}{6},\ \sin y=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$$

III. 解と係数の関係より

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-5\\ \tan\alpha\tan\beta=6\end{cases} \cdots (*)$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1.$$



$(*)$ から $\tan\alpha, \tan\beta<0$ であるから

$-\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta<0$ より

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{4}\pi$$

<point>

1. 加法定理 (sin, cos, tan)

[2]

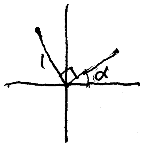
$\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)=\sqrt{3}\sin x$ が

任意のxで成り立つとき

$x=0, \frac{\pi}{2}$で成り立つことが必要

$x=0$として

$\sin\alpha+\sin\beta=0$ …①



$x=\frac{\pi}{2}$として

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{2}+\beta)=\sqrt{3}$

$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}$ …②

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より

$(-\sin\alpha)^2+(\sqrt{3}-\cos\alpha)^2=1$

$\cancel{1}-2\sqrt{3}\cos\alpha+3=\cancel{1}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\therefore \alpha=\pm\frac{\pi}{6}$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$とすると①より $\beta=-\frac{\pi}{6}$ となり $\alpha<\beta$ に反するので

$\alpha=-\frac{\pi}{6}, \beta=\frac{\pi}{6}$

このとき任意のxについて

$\sin(x-\frac{\pi}{6})+\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$=\sqrt{3}\sin x$

となり十分

よって $\alpha=-\frac{\pi}{6}, \beta=\frac{\pi}{6}$ //

<point>

1. 三角関数の恒等式

必要条件で係数や中身の文字を求め

十分性を示す

注. 係数比較はしてはならない.

[3]

(1) $A+B+C=\pi$

$A\leqq B\leqq C$ より

$A+B+C\geqq A+A+A$

$\pi\geqq 3A$

$\therefore A\leqq\frac{\pi}{3}$

$0<A\leqq\frac{\pi}{3}$ より

$0<\tan A\leqq\sqrt{3}$ //

(2) $\tan C=\tan\{\pi-(A+B)\}$

$=-\tan(A+B)$

$=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ //

(3) (1)より $\tan A=1$

(2)より

$\tan C=-\frac{1+\tan B}{1-\tan B}$

$\tan C(1-\tan B)=-1-\tan B$

$\tan B\tan C-\tan B-\tan C=1$

$(\tan B-1)(\tan C-1)=2$

$0<B\leqq C<\frac{\pi}{2}$ であるから

$0<\tan B\leqq\tan C$, $\tan C>\sqrt{3}$ より

$\tan B-1=1$, $\tan C-1=2$

$\therefore \tan B=2$, $\tan C=3$ //

[4]

(1) $\cos3\theta=\cos4\theta$

$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1$

$=2(2\cos^2\theta-1)^2-1$

$=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

より

$4\cos^3\theta-3\cos\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

$8\cos^4\theta-4\cos^3\theta-8\cos^2\theta+3\cos\theta+1=0$

よって求める4次方程式の1つは

$8x^4-4x^3-8x^2+3x+1=0$ //

(2) $\theta=\frac{2\pi}{7}$ のとき

1	8	−4	−8	3	1
		8	4	−4	−1
	8	4	−4	−1	0

$\cos4\theta=\cos\frac{8\pi}{7}=\cos(-\frac{6\pi}{7})=\cos\frac{6\pi}{7}=\cos3\theta$

より $\cos\theta$は(1)の方程式の解の1つである

$8x^4-4x^3-8x^2+3x+1$

$=(x-1)(8x^3+4x^2-4x-1)$

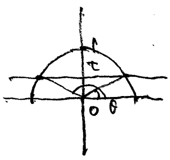
であり
$\cos\frac{2\pi}{7}\neq 1$ であるから
求める3次方程式の1つは
$$8x^3+4x^2-4x-1=0$$

(3) $\cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ も①を満たし
これらは1ではなく
$\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ は互いに異なるから
これらは(2)の方程式の異なる3解である
解と係数の関係より
$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{8}$$

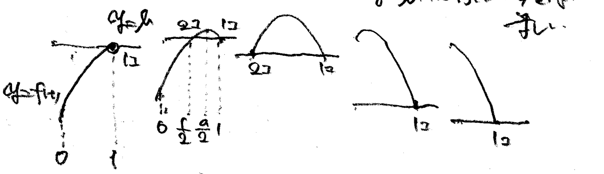
<point>
1. 3倍角・4倍角
チェビシェフ多項式

$\boxed{5}$

(1) $\cos2\theta+2a\sin\theta-b=0$
$1-2\sin^2\theta+2a\sin\theta-b=0$
$-2\sin^2\theta+2a\sin\theta+1=b$
$t=\sin\theta$ とおくと $0\leqq t\leqq 1$
$0\leqq t<1$ のとき
1つの t に2つの θ
$t=1$ のとき
1つの t に1つの θ が対応する



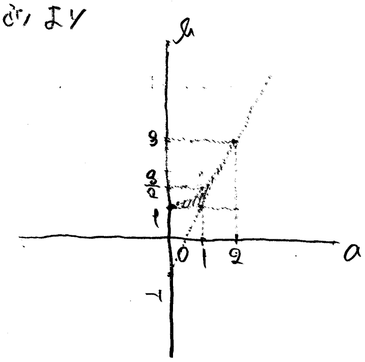
$-2t^2+2at+1=b$ …①
$f(t)=-2t^2+2at+1$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおく
$=-2\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}+1$
①を満たす t は $y=f(t)$ と $y=b$ の共有点の t 座標に等しい



$f(\theta)$ が奇数個の解をもつとき
$b=f(1)$
$=2a-1$

$f(\theta)=0$ が4つの解をもつのは $0<\frac{a}{2}<1$ すなわち $0<a<2$ のときで
(i) $\frac{1}{2}\leqq\frac{a}{2}<1$ すなわち $1\leqq a<2$ のとき
$$f(1)<b<\frac{a^2}{2}+1$$
$$\therefore\ 2a-1<b<\frac{a^2}{2}+1$$
(ii) $0<\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$ すなわち $0<a<1$ のとき
$$f(0)<b<\frac{a^2}{2}+1$$
$$\therefore\ 1<b<\frac{a^2}{2}+1$$

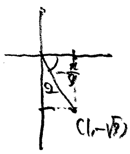
(i), (ii) より



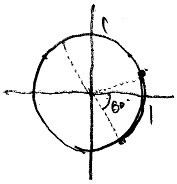
求める範囲は図の斜線部
ただし境界は除く

$\boxed{6}$

$f(x)=\sin(x+a)-\sqrt{3}\cos(x+a)$
$=2\sin(x+a-60^\circ)$



$\boxed{\text{最大値}}$
$0^\circ\leqq a<60^\circ$ のとき
$f(90^\circ)=2\sin(a+30^\circ)$
$60^\circ\leqq a<150^\circ$ のとき
2
$150^\circ\leqq a<180^\circ$ のとき
$f(0^\circ)=2\sin(a-60^\circ)$



$\boxed{a=0}$

$\boxed{\text{最小値}}$
$0^\circ\leqq a<105^\circ$ のとき
$f(0^\circ)=2\sin(a-60^\circ)$
$105^\circ\leqq a\leqq180^\circ$ のとき
$f(90^\circ)=2\sin(a+30^\circ)$

<point>
1. 三角関数の合成

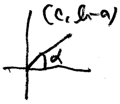
7

$f(x)=a\sin^2x+b\cos^2x+c\sin x\cos x$

$=a\cdot\dfrac{1-\cos2x}{2}+b\cdot\dfrac{1+\cos2x}{2}+\dfrac{c}{2}\sin2x$

$=\dfrac{1}{2}\{c\sin2x+(b-a)\cos2x+(a+b)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{\sqrt{(a-b)^2+c^2}\sin(2x+\alpha)+a+b\}$



より

$\dfrac{1}{2}\{a+b-\sqrt{(a-b)^2+c^2}\}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}\{a+b+\sqrt{(a-b)^2+c^2}\}$

最値を調べるとき

$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\{a+b+\sqrt{(a-b)^2+c^2}\}=2\\ \dfrac{1}{2}\{a+b-\sqrt{(a-b)^2+c^2}\}=-1\end{cases}$

$\begin{cases}a+b+\sqrt{(a-b)^2+c^2}=4\cdots①\\ a+b-\sqrt{(a-b)^2+c^2}=-2\cdots②\end{cases}$

①+②より

$a+b=1\cdots③$

aは整数よりbも整数

①−②より

$\sqrt{(a-b)^2+c^2}=3$

$(a-b)^2+c^2=9$

$\therefore(a-b)^2=9-c^2$

$(a-b)^2\geqq0$より

$9-c^2\geqq0\quad\therefore-3\leqq c\leqq3$

このとき

$a-b=\pm\sqrt{9-c^2}\cdots④$

③, ④より

$a=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{9-c^2})$

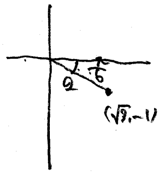
$0\leqq\sqrt{9-c^2}\leqq3$, aは整数より

$a=0,1,2,-1$

$\therefore(a,b,c)=(0,1,\pm2\sqrt{2}),(1,0,\pm2\sqrt{2})$
$\quad=(2,-1,0),(-1,2,0)$

8

(1) $t=\sqrt{3}\sin x-\cos x$



$=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$から$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5\pi}{6}$より

$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$

$-1\leqq2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq2$

$\therefore-1\leqq t\leqq2$

(2) $y=-\sqrt{3}\sin2x-\cos2x-2a(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+4$

$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x$より

$t^2=3\sin^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x$

$=2\cdot\dfrac{1-\cos2x}{2}-\sqrt{3}\sin2x+1$

$\therefore-\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=t^2-2$

よって

$y=(t^2-2)-2at+4$

$=t^2-2at+2$

(3) $y=t^2-2at+2\quad(-1\leqq t\leqq2)$

$=(t-a)^2-a^2+2$

$a\leqq-1$, $a\geqq2$のとき yの最大値・最小値の差$\geqq9$より

$-1<a<2$

$0\leqq y\leqq6$が常に成り立つとき

$f(a)\geqq0$ かつ $f(-1)\leqq6$ かつ $f(2)\leqq6$

$\begin{cases}-a^2+2\geqq0 & \therefore-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}\\ 2a+3\leqq6 & \therefore a\leqq\dfrac{3}{2}\\ -4a+6\leqq6 & \therefore a\geqq0\end{cases}$

$\therefore0\leqq a\leqq\sqrt{2}$

(4) $t=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\quad(0\leqq x\leqq\pi)$

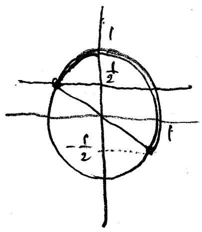
$-1\leqq t<1$, $t=2$のときは

1つのtに対して1つのx

$1\leqq t<2$のときは

1つのtに対して2つのxが

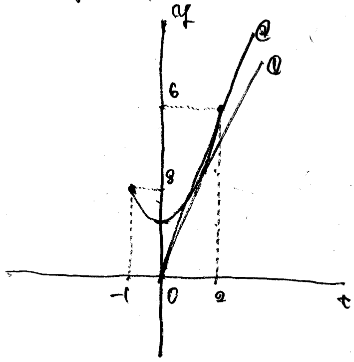
対応する



$t^2-2at+2=0 \cdots (*)$

$t^2+2=2at$

を満たすtは $y=t^2+2$ と $y=2at$ の共有点のt座標に等しいから



① $y=t^2+2$ と $y=2at$ が接するとき

(*)の判別式をDとして

$D/4=a^2-2=0 \quad \therefore a=\sqrt{2}$

② $y=2at$ が $(2,6)$ を通るとき

$6=4a \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

題意を満たすのは

$\sqrt{2}<a\leqq\frac{3}{2}$ //

[9]

(1) $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=\dfrac{2\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$

$=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$ //

(2) $\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$

$=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$

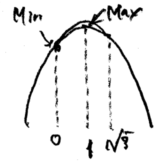
$=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ //

(3) $y=\dfrac{2t-(1+t^2)}{(1-t^2)+(1+t^2)}$

$=\frac{1}{2}(-t^2+2t-1)$ //

(4) $y=-\frac{1}{2}(t-1)^2$

$0°\leqq\theta\leqq120°$ より $0\leqq t\leqq\sqrt{3}$



$t=1$ のとき最大

最大値 0 $\theta=90°$

$t=0$ 〃 小

最小値 $-\frac{1}{2}$ $\theta=0°$ //

<point>

1. 14の媒介変数表示する．

[10]

(1) $\cos A+\cos B=2\cos\alpha\cos\beta$

$\alpha+\beta$ $\alpha-\beta$ とおく

$\alpha=\frac{A+B}{2},\ \beta=\frac{A-B}{2}$ $=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ //

(2) $\cos A+\cos B=2\cos\frac{\overset{\pi-C}{A+B}}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$A+B+C=\pi$ であるから $A+B=\pi-C$ より

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$

$-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから $-1<\cos\frac{A-B}{2}<1$ より

$\leqq 2\sin\frac{C}{2}$

等号が成り立つのは $\cos\frac{A-B}{2}=1$ すなわち

$\frac{A-B}{2}=0 \quad \therefore A=B$ のとき

(3) $\cos A+\cos B+\cos C$

$\leqq 2\sin\frac{C}{2}+\cos C=2\sin\frac{C}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$f(C)$ は $=-2\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=f(C)$

$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$ のとき最大でこのとき

$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6} \quad \therefore C=\frac{\pi}{3}$

(2)より $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ のとき与式は最大となる //

<point>

1. 和積公式

2. 積和公式も見直しておこう